Arbeitsblatt 05

03/04.12.2020

Auf diesem Blatt wird die Wirkung von partiellen Ableitungen und Gradienten auf Skalarfunktionen betrachtet. Zusätzlich werden noch Taylor-Reihen verschiedener Funktionen einer und mehrerer Veränderlicher behandelt.

Aufgabe 1: Partielle Ableitungen und der Gradient (10 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden partiellen Ableitungen:

(a) $\frac{\partial}{\partial t}t^u$, $\frac{\partial}{\partial u}t^u$, $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}e^x \cos y$,

(b) $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, und $\frac{\partial}{\partial z}$ von $f(x,y,z) = x^2 y \sin z - z e^y - z^3 x$,

(c) $\frac{\partial}{\partial x}f,\ \frac{\partial}{\partial y}f,\ \frac{\partial}{\partial z}f,\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) f$ für $f(x,y,z) = -\frac{1}{r}$, mit $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

(d) Bestimmen Sie für die Funktion $f(x,y) = x \exp\left(-\frac{yx^2+y^2}{2}\right)$ die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x}f,\ \frac{\partial}{\partial y}f,\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}f,\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}f,\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}f,\ \frac{\partial^2}{\partial y^2}f,\ \frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2}f,\ \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial x}f.$$

Führen Sie die Ableitungen in der angegebenen Reihenfolge aus und prüfen Sie an $f(x,y)$, dass die Reihenfolge der partiellen Ableitungen (der obigen $\partial^2,\ \partial^3$ Ordnungen) keine Rolle spielt.

(e) Bestimmen Sie den Gradienten der Funktionen $\cos(xyz)$, $(\,x^2 z + yz^2)\tan(x+yz)$, xe^{yz}.

Das elektrische Feld $\vec{E}$ einer Punktladung mit der Ladung q im Vakuum ist ein konservatives Feld und wird bestimmt durch das Potential $\varphi(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ mit der Vakuumdielektrizitätszahl ε_0.

(f) Bestimmen Sie das Feld mittels $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$.

Aufgabe 2: Taylor-Entwicklung für eine Variable (10 Punkte)

Berechnen Sie die Taylor-Entwicklung von

(a) $f(x) = \ln x$ um $x = 1$ in allen Ordnungen,

(b) $f(x) = \frac{1}{2}(x^2+1)\exp(-x)$ um $x = 0$ bis zur 2. Ordnung,

(c) $f(x) = \sin(2x)$ um $x = 0$ bis zur 3. Ordnung,

(d) $f(x) = \left(x^4 \sin(\pi x) + x^7 e^{-2x^2} + \frac{x^9}{1+x^2}\right) e^{2x}$ um $x = 0$ bis zur 3. Ordnung,

(e) $f(x) = \frac{1}{1+xe^{2x}}$ um $x = 0$ bis zur 2. Ordnung,

(f) $f(x) = \sqrt{a\sin^2(x) + b\cos^2(x)}$, $(a \neq b)$ um $x = \pi$ und $x = \pi/2$ bis zur 2. Ordnung.

Aus der speziellen Relativitätstheorie folgt, dass die Energie E eines Teilchens der Masse m, das sich mit der Geschwindigkeit v bewegt durch

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

gegeben ist.

(g) Entwickeln Sie diesen Ausdruck in eine Taylor-Reihe in der Geschwindigkeit bis zur Ordnung v^4. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis für kleine Geschwindigkeiten $v \ll c$ mit der klassischen kinetischen Energie $E_{\text{kl}} = \frac{1}{2}mv^2$.

Taylor-Reihen sind nüztlich um z.B. Integrale von Funktionen approximativ zu bestimmen.

(h) Bestimmen Sie das Integral $\int_0^a \frac{1}{1+(e^x - e^{-x})/2}\,\mathrm{d}x$ mittels einer Taylor-Reihe zweiter Ordnung um $x = 0$ für $a = 0.01;\ 0.1;\ 1$. Wie gut approximiert die Reihe das Integral?

Aufgabe 3: Taylor-Entwicklung mehrdimensionaler Funktionen mittels des Gradienten (schriftlich) (10 Punkte)

Eine alternative Form der Taylor-Entwicklung für mehrere Veränderliche entwickelt um einen Punkt $\vec{x}_0$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left((\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}'} \right)^n f(\vec{x}') \Big|_{\vec{x}'=\vec{x}_0} \\ &= f(\vec{x}_0) + \left((\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}'} \right) f(\vec{x}') \Big|_{\vec{x}'=\vec{x}_0} + \frac{1}{2} \left((\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}'} \right)^2 f(\vec{x}') \Big|_{\vec{x}'=\vec{x}_0} + O(\vec{x}^3). \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Taylor-Reihe von

(a) $f(\vec{x}) = x^2 \exp(y) - 2\sin(x) z^3$ um den Punkt $(1, 0, -2)$ bis zur 2. Ordnung,

(b) $f(\vec{x}) = (2x - y^2) \exp[-(x^2 + y^2)]$ um den Punkt $(0, 0)$ bis zur 2. Ordnung,

(c) $f(\vec{x}) = 2\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ um den Punkt $(1, 1, 1)$ bis zur 2. Ordnung,

(d) $f(\vec{x}) = x^2 z + yz^2$ um den Punkt $(5, 1, 0)$ bis zur 2. Ordnung,

(e) $f(\vec{x}) = x^2 y \sin z - ze^y - z^3 x$ um den Punkt $(1, 0, 0)$ bis zur 2. Ordnung,

(f) $f(\vec{x}) = \frac{xyz}{1+e^{xy}}$ um den Punkt $(0, 0, 1)$ bis zur 2. Ordnung.