Arbeitsblatt 06

10/11.12.2020

In diesem Blatt werden sowohl homogene als auch inhomogene Differentialgleichungen erster Ordnung behandelt.

Aufgabe 1: Homogene Differentialgleichungen (10 Punkte)

(a) Suchen Sie die Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

$$t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y + 3y = 0;\ y(1) = 2, t > 0,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y = -y\cos t;\ y(0) = 1/2,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y + \frac{y}{1+x^2} = 0.$$

(b) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) = \frac{y(x)}{x} - \tan\left(\frac{y(x)}{x}\right),$$

die die Bedingung $y(2) = \pi/3$ erfüllt. Die Substitution $v(x) = y(x)/x$ kann hilfreich sein.

Aufgabe 2: Inhomogene Differentialgleichungen (10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y = 2t(25 - y).$$

(b) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x) - \frac{y(x)}{x^2} = \frac{1}{x^3},\ \ y(1) = 1.$$

(c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) + 2xy(x) = xe^{-x^2}.$$

(d) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{y}\cos t + y\sin t = 1$$

im Intervall $-\pi/2 < t < \pi/2$.

Aufgabe 3: Radioaktive Zerfallsketten (10 Punkte)

Der mittlere radioaktive Zerfall eines Blocks aus anfänglich $N_A(0) = N_0$ radioaktiven Atomen in einen Block aus N_B Atomen kann geschrieben werden mittels einer Ratengleichung

$$\dot{N}_A = -\lambda_A N_A.$$

(a) Bestimmen Sie die Lösung dieser homogenen Differentialgleichung. Wie sieht die zeitliche Entwicklung der Endsubstanz N_B aus?

Radioaktive Zerfälle sind häufig Zerfallsketten mit verschiedenen Zerfallskonstanten λ. Die Ratengleichung für zwei Zerfälle kann angegeben werden via

$$\begin{aligned} \dot{N}_A &= -\lambda_A N_A, \\ \dot{N}_B &= -\lambda_B N_B + \lambda_A N_A. \end{aligned}$$

(b) Bestimmen Sie die zeitliche Entwicklung der jeweiligen Atomarten N_A, N_B, N_C, wobei anfänglich nur N_0 Atome der Art A existieren.

Des weiteren kann es auch sein, dass Atome in zwei oder mehrere verschiedene Atome zerfallen. Vorausgesetzt, die Atomart N_A zerfalle mit einer Rate von λ_B in die Atomart N_B und mit λ_C in die Atomart N_C, wobei ($\lambda = \lambda_B + \lambda_C$), dann sind die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{N}_A &= -\lambda N_A, \\ \dot{N}_B &= \lambda_B N_A, \\ \dot{N}_C &= \lambda_C N_A. \end{aligned}$$

(c) Bestimmen Sie die Lösungen dieser Differentialgleichungen mit der Anfangsbedingung $N_A(0) = N_0,\ N_B(0) = N_C(0) = 0$.