Arbeitsblatt 08

07/08.01.2021

Auf diesem Blatt werden die Kugel- und Zylinder- Koordinatensysteme behandelt. Mit diesen können bestimmte Integrale leichter berechnet werden, als mit kartesischen Koordinaten. Des Weiteren werden verschiedene zweidimensionale Integrale betrachtet.

Aufgabe 1: Krummlinige Koordinaten (10 Punkte)

(a) Berechnen Sie die Polarkoordinaten von $(x, y) = (3, 3)$ und $(x, y) = (-1, \sqrt{3})$.
Berechnen Sie die kartesischen Koordinaten von $(r, \varphi) = (1, \pi)$ und $(r, \varphi) = (4, \frac{4\pi}{3})$.

(b) Berechnen Sie die Zylinderkoordinaten von $(x, y, z) = (-2, 2, 3)$.
Berechnen Sie die kartesischen Koordinaten von $(\rho, \Phi, z) = (3, \frac{\pi}{3}, -4)$.

(c) Berechnen Sie die Kugelkoordinaten von $(x, y, z) = (2\sqrt{3}, \frac{\pi}{3}, -4)$.
Berechnen Sie die kartesischen Koordinaten von $(\rho, \Phi, \Theta) = (8, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6})$.

(d) Berechnen Sie die Kugelkoordinaten von $(\rho, \Phi, z) = (1, \frac{\pi}{2}, 1)$.

(e) Drücken Sie die Gleichung $x^2 - y^2 = 25$ in Zylinderkoordinaten aus.

(f) Drücken Sie die Gleichung $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ in Kugelkoordinaten aus.

(g) Drücken Sie die Gleichung $x + y + z = 1$ in Kugelkoordinaten aus.

(h) Drücken Sie die Gleichung $r = 2\sin(\Phi)$ in kartesischen Koordinaten aus.

Aufgabe 2: Zweidimensionale (Flächen-)integrale (10 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden zweidimensionalen Integrale:

(a)

$$\int_0^9 \int_{x^2/9}^{3\sqrt{x}} 2 \, \mathrm{d}y \mathrm{d}x,$$

(b)

$$\int_0^{16} \int_{\frac{x}{4}}^{\sqrt{x}} y \, \mathrm{d}y \mathrm{d}x,$$

(c)

$$\int_0^6 \int_0^4 (x^2 + y^2) \, \mathrm{d}y \mathrm{d}x.$$

Berechnen Sie die folgenden Integrale auf zwei Wegen. Zum einen führen Sie erst die Integration nach dx und dann nach dy aus und das andere mal integrieren Sie erst nach dy und dann nach dx.

(d)

$$\int\int_{R_1} x^2 + y^2 \,\mathrm{d}, A$$

(e)

$$\int\int_{R_2} x + y \,\mathrm{d}.A$$

Dabei bezeichnet R_1 die Region zwischen den Kurven $y = x^2$, $y = 1$ und der y-Achse, sowie R_2 die Region zwischen den Kurven $y = \sqrt{x}$ und $y = x$. Untenstehende Abbildungen zeigen die Regionen R_1 und R_2.

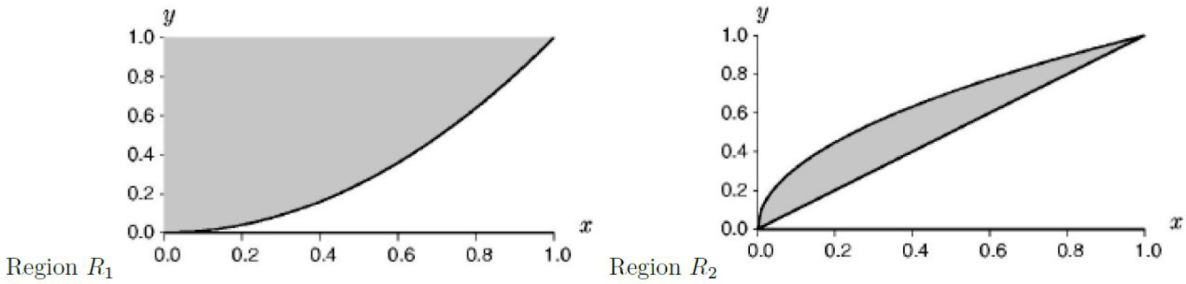

Abbildung 1: Zweidimensionale Integrationsflächen.

Aufgabe 3: Wechsel der Integrationsvariablen (2D) (10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie das Gaußintegral

$$G = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \,\mathrm{d}x$$

mittels Polarkoordinaten.

Tipp: Betrachten Sie G^2 als zweidimensionales Integral und berechnen Sie dieses mittels Polarkoordinaten.

(b) Berechnen Sie

$$\int\int_{R} \sqrt{x^2 + y^2} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

für die von $x^2 + y^2 = R^2$ umschlossene Fläche.

(c) Berechnen Sie das Integral

$$\int\int_{R} (y - x) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

wobei die Region R diejenige ist, die durch die Geraden $y = x+1, y = x-3, y = -x/3+2, y = -x/3 + 4$ umschlossen wird. Nutzen Sie die Transformation $u = y - x,\ v = y + x/3$ um das Integral zu vereinfachen.