Mathematische Methoden der Physik
Wintersemester 20/21

Universität Stuttgart

Arbeitsblatt 09

14/15.01.2021

Weiterführend zum vorherigen Blatt werden nun dreidimensionale Integrale mit verschiedenen Koordinatensystemen betrachtet. Zunächst werden kartesische und Kugel-, sowie Zylinderkoordinaten betrachtet und zuletzt verschiedene krummlinige Koordinaten in denen die Jacobi-Determinanten berechnet werden müssen.

Aufgabe 1: Dreidimensionale (Volumen)integrale (10 Punkte)

(a) Berechnen Sie $\int_0^1 \int_0^1 \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 xyz \, \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$.

(b) Berechnen Sie das Volumen der durch $z = x^2 + y^2$ und $z = 2x$ beschränkten Region.

Tipp: Zur Lösung der entstehenden Integrale ist Substitution und $\cos^2 u = 1 - \sin^2 u$ hilfreich.

(c) Bestimmen Sie den Schwerpunkt des durch den parabolischen Zylinder $z = 4 - x^2$ und die Ebenen $x = 0, y = 0, z = 0$ beschränkten Gebietes unter Annahme einer konstanten Dichte σ (siehe linkes Bild).

Aufgabe 2: Kugel-und Zylinderintegrale (10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie das Volumenintegral des von $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ umschlossenen Volumens einmal in kartesischen Koordinaten und einmal in Kugelkoordinaten.

(b) Bestimmen Sie für die durch das Paraboloid $z = x^2 + x^2$ und den Zylinder $x^2 + y^2 = a^2$ beschränkten Region das Trägheitsmoment bezüglich der z-Achse unter Annahme einer konstanten Dichte σ (siehe rechtes Bild).

(c) Bestimmen Sie $\int\int\limits_R\int \sqrt{x^2+y^2+z^2} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, wobei R die durch die Ebene $z = 3$ und den Kegel $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ beschränkte Region ist.

Tipp: Integration in Zylinderkoordinaten in der Reihenfolge ρ, z, Φ.

Aufgabe 3: Krummlinige Volumenintegrale (schriftlich) (10 Punkte)

(a) Berechnen Sie das Volumenintegral der Koordinaten $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1, 0 \leq w \leq 1$, wobei die Transformation zu kartesischen Koordinaten gegeben ist durch $x = (u^2 - v^2)/2,\ y = uv,\ z = w$.

(b) Berechnen Sie das Volumenintegral der Koordinaten $0 \leq u \leq 1, 1 \leq v \leq 2, 1 \leq w \leq 2$, wobei die Transformation zu kartesischen Koordinaten gegeben ist durch $x = u + 2v,\ y = 2u + w^2,\ z = uv$.

(c) Berechnen Sie das Volumenintegral der Koordinaten $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq \pi, -1 \leq w \leq 1,\ \alpha = 2$, wobei die Transformation zu kartesischen Koordinaten gegeben ist durch $x = \alpha \cosh u \cos v,\ y = \alpha \sinh u \sin v,\ z = w$, wobei $\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2,\ \cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$. Benutzen Sie zur Vereinfachung $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

Tipp: $\int \sinh^2 x \, \mathrm{d}x = (\sinh(2x) - 2x)/4$.

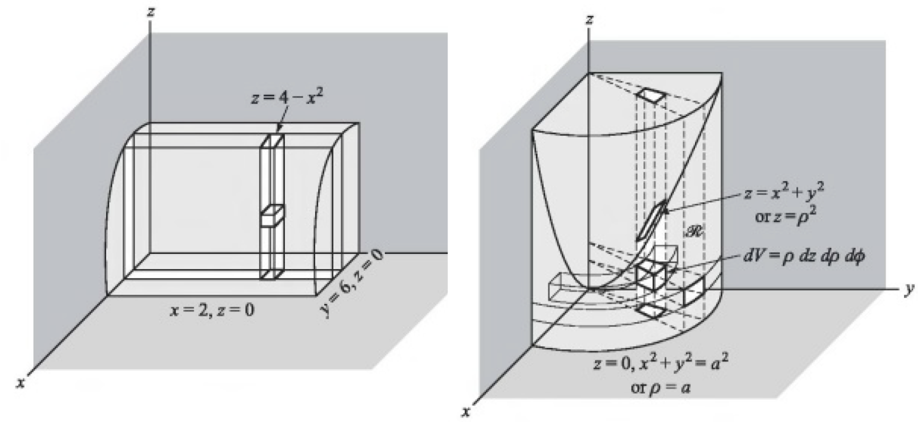

Abbildung 1: Dreidimensionale Integrationsvolumina.