Mathematische Methoden der Physik
Wintersemester 20/21

Universität Stuttgart

Arbeitsblatt 10

21/22.01.2021

Auf diesem Blatt wird Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung betrachten. Zudem werden Eigenschaften der Binomialverteilung und Fehlerfortpflanzung von Messergebnissen behandelt.

Aufgabe 1: Wahrscheinlichkeitsrechnung (10 Punkte)

(a) Eine Maus läuft durch ein Labyrinth mit insgesamt 4 Weggabelungen. Es gibt nur einen richtigen Weg bis ans Ziel. Bei der ersten Weggabelung gibt es 2, bei der zweiten 4, bei der dritten 2 und beider vierten 3 mögliche Wege. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Maus den richtigen Weg wählt?

(b) Wie viele verschiedene Mannschaften zu je 5 SpielerInnen lassen sich aus n = 23 SchülerInnen aufstellen?

(c) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit aus 32 Karten der Reihe nach 'Herz Ass', 'Herz König', 'Herz Dame' und 'Herz Bube' zu ziehen?

(d) Bei der Fußball-WM 2014 nahmen 32 Nationen teil. Wie viele Möglichkeiten gab es

  (i) für die Teilnehmer des Halbfinales (= Runde der letzten 4)?

  (ii) für die Reihenfolge auf den ersten 4 Plätzen?

(e) Berechnen Sie den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung der Exponentialverteilung $f(x) = 3e^{-3x}$.

Aufgabe 2: Binomialverteilung (10 Punkte)

Die Binomialverteilung ist eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung die in die gaussische Verteilung im Limit großer N übergeht. Die Binomialverteilung hat die Form $P_N(n) = C_N^n p^n q^{N-n}$ mit $C_N^n = N!/(n!(N-n)!)$ und $p + q = 1$.

(a) Berechnen Sie den Mittelwert der Verteilung $\langle n \rangle = \sum_{n=0}^{N} P_N(n)n$ und die Varianz $\langle \Delta n^2 \rangle = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2$. Nutzen Sie hierfür einen oft genutzten mathematischen Trick: Betrachten Sie q, p als unabhängige Variablen und nutzen Sie, dass $np^n = p\partial p^n/\partial p$ gilt.

Hinweis: Nutzen Sie des Weiteren den binomischen Lehrsatz.

(b) Bestimmen Sie das Verhältnis $\sqrt{\langle \Delta n^2 \rangle}/\langle n \rangle$ für $p = q = 1/2$ und diskutieren Sie den Grenzfall $N \gg 1$.

(c) Um die approximative Form der Verteilung $P_N(n)$ für $p = q = 1/2$ im Grenzfall $N \gg 1$ zu bestimmen, entwickeln Sie die Funktion $\ln P$ mittels einer Taylorentwicklung bis zur zweiten Ordnung um das (zunächst unbestimmte) Maximum der Verteilung $\tilde{n}$.

(d) Nutzen Sie die Stirlingnäherung $n! \approx \sqrt{2n\pi}n^n e^{-n}$ um $\tilde{n}$ zu bestimmen.

Die Binomialverteilung kann auch in eine andere Verteilung übergehen, wenn zwei Grenzwerte gleichzeitig stattfinden $N \to \infty,\ p \to 0$, wobei der Erwartungswert $\langle n \rangle = Np = const = \lambda$ konstant bleibt. Dieser Grenzfall der seltenen Ereignisse führt zur Poissonverteilung $P_\lambda(n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$.

(e) Beginnen Sie mit der Binomialverteilung und ordnen Sie dessen Terme entsprechend, um die Grenzfälle $N \to \infty, p \to 0$ mit $Np = \lambda = const$ anwenden zu können und zeigen Sie, dass die Verteilung in die Poissonverteilung übergeht.

Hinweis: $e^{-\lambda} = \lim_{N\to\infty}(1 - \lambda/N)^N$.

Aufgabe 3: Fehlerfortpflanzung (10 Punkte)

Alice möchte ihr ungefähr rechteckiges Zimmer vermessen. Sie benutzt ein langes Maßband und misst zwei sich berührende Seiten wiederholt. Die Messwerte sind

x in m	3.7	3.3	3.1
y in m	5.2	4.7	4.3

Tabelle 1: Zimmermesswerte

(a) Zunächst möchte sie den Umfang ihres Zimmers bestimmen. Unter Annahme eines rechteckigen Zimmers, was ist der mittlere Umfang mit Standardabweichung?

(b) Das Zimmer ist gemietet und im Mietvertrag werden 20 Quadratmeter angegeben. Ist diese Größe im Bereich des Möglichen?

(c) Aus Spaß bestimmt Alice mit den obigen Messwerten $z = \ln(x/1\text{m})$. Welchen mittleren Wert und welche Standardabweichung erhält sie?

Bestimmen Sie die folgenden Fehlerfortpflanzungen.

(d) Berechnen Sie $z = x+y-w$ der Werte $x = (2.0\pm0.2)$ cm, $y = (3.0\pm0.6)$ cm, $w = (4.52\pm0.02)$ cm.

(e) Den Umfang eines Kreises mit Radius $r = (3.0 \pm 0.2)$ cm.

(f) $z = wy^2/\sqrt{A}$ mit $w = (4.52 \pm 0.02)$ cm, $A = (2.0 \pm 0.2)$ cm^2, $y = (3.0 \pm 0.6)$ cm.