Arbeitsblatt 12

06/07.02.2021

Auf diesem Blatt werden verschiedene Differentialgleichungen zweiter Ordnung behandelt. Diese werden benötigt um viele physikalische Probleme zu beschreiben. Dies gilt insbesondere in der klassischen Mechanik, wie am wir Beispiel eines Federpendels sehen werden.

Aufgabe 1: Homogene Differentialgleichungen 2. Ordnung (10 Punkte)

Lösen Sie die folgenden homogenen Differentialgleichungen 2. Ordnung:

(a) $y'' + by' + cy = 0$,

(b) $y'' + 4y' + 3y = 0$,

(c) $y'' - 5y' + 4y = 0$,

(d) $y'' + y' - 6y = 0$,

(e) $y'' - 4y' + 4y = 0$,

(f) $y'' + 2y' + 2y = 0$,

(g) $y'' + y' + y = 0$,

(h) $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = -a^2 y, a > 0$.

Aufgabe 2: Inhomogene Differentialgleichungen 2. Ordnung (10 Punkte)

Lösen Sie die folgenden inhomogenen Differentialgleichungen:

(a) $y'' + 2y' + 2y = e^{3x}$,

(b) $y'' + y' - 12y = xe^x$,

(c) $y'' + 9y = e^x \cos 2x$,

(d) $y'' + y = \tan x$,

(e) $y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln x$,

(f) $y'' - 3y' + 2y = xe^{3x} + 1$,

(g) $y'' + y = 1/\cos x$,

(h) $y'' + y = x \sin x$.

Aufgabe 3: Harmonischer Oszillator (10 Punkte)

Betrachten Sie einen Körper der Masse m, der mittels einer Feder der Federkonstante k an einer Wand befestigt ist. Die Auslenkung des Körpers aus der Gleichgewichtsposition ist zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ durch x_0 gegeben, seine Anfangsgeschwindigkeit ist v_0. Die Differentialgleichung dieses Systems ist

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx. \tag{1}$$

Bestimmen Sie

(a) die Position $x(t)$ für alle Zeiten,

(b) die Geschwindigkeit $v(t)$ für alle Zeiten,

(c) die Amplitude, Frequenz und maximale Geschwindigkeit des Körpers.

Obige Differentialgleichung ist eine simplifizierte Darstellung der Wirklichkeit. Luftreibung etc. führt zu einem Verlust der kinetischen Energie im Laufe der Zeit. Dieser Effekt kann empirisch beschrieben werden mittels eines neuen Faktors $F_{\text{Reibung}} = -\gamma\dot{x}$ mit Reibungskoeffizient γ.

(d) Bestimmen Sie für diese modifizierte Differentialgleichung (a)-(b).