Arbeitsblatt 13

11/12.02.2021

Dieses letzte Blatt betrachtet verschiedene Aufgaben über Fourier-Reihen und Transformationen. Besonders die Fourier-Transformation kann genutzt werden um Differentialgleichungen zu lösen, wie anhand der Wellengleichung gezeigt wird.

Aufgabe 1: Fourier-Reihen (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Fourier-Reihen der folgenden Funktionen.

(a) Signumfunktion

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 0, & x = -\pi, 0, \pi \\ 1, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

(b)

$$f(x) = |x|$$

(c)

$$f(x) = x^2$$

(d)

$$f(x) = |\sin x|$$

Aufgabe 2: Fourier-Transformationen (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Fourier-Transformation der folgenden Funktionen.

(a) Rechteck-Funktion

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \frac{1}{2} \\ 0, & |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

(b) Dreiecksfunktion $\Sigma(t)$ und dessen erster Ableitung $\dot{\Sigma}(t)$

$$\Sigma(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

(c) Dirac-Funktion

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}, & 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

(d) Sinusfunktion und dessen zweite Ableitung

$$f(t) = \sin(\omega t)$$

(e) endlicher Wellenzug $f(t)$ und dessen dritte Ableitung

$$f(t) = \begin{cases} e^{i\omega t}, & -T < t \leq T \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 3: Fourier-Lösung der Wellengleichung (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Differentialgleichung mittels Fourier-Transformation.

(a) Bestimmen Sie die x-Fourier-transformierte Gleichung der Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \ -\infty < x < \infty, \ t > 0$$

mit Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = e^{-x^2}, \ -\infty < x < \infty$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \ -\infty < x < \infty.$$

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der entstandenen Differentialgleichung.

(c) Wie sehen die Anfangsbedingungen im Fourier-Raum aus? Finden Sie die Lösung, die die Anfangsbedingungen erfüllen.

(d) Nutzen Sie die inverse Fourier-Transformation um die Lösung im Realraum zu erhalten.