Übungen zur Vorlesung „Nichtlineare Dynamik I“, WS 2019/20

Blatt 1 vom 15. Oktober 2019

Scheinkriterien: Je 60 % der schriftlichen und der Votierpunkte sowie Vorrechnen.
Schriftliche Abgaben sind in PDF-Form (ein Dokument) beim Tutor per E-Mail abzugeben. Dieses soll geforderte Rechnungen und Diagramme enthalten und mögliche Fragen beantworten. Die Abgabe von Quellcode wird nicht berücksichtigt; bei Fragen hierzu bitte persönlich beim Tutor melden.
Tutor: Johannes Reiff ⟨johannes.reiff@itp1.uni-stuttgart.de⟩

Abgabe: **2019-10-27** Besprechung: **2019-10-30**

Aufgabe 1: Getriebenes Pendel – numerisch **schriftlich, 15 Punkte**

Das periodisch getriebene ideale Pendel ($g/l = 1$) mit Dämpfung wird beschrieben durch die nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{\theta} = -\sin(\theta) - 2\gamma\dot{\theta} + \alpha\sin(\omega_\mathrm{d} t)\,. \tag{1}$$

Dabei ist ω_d die Frequenz der treibenden Kraft, α beschreibt ihre Stärke.

(a) Entwickeln Sie ein Programm zur numerischen Lösung dieser Differentialgleichung.

Lösungsvorschlag: Benutzen Sie das Runge-Kutta-Verfahrens 4. Ordnung. Schreiben Sie die Gleichung dazu als ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$\dot{\omega} = -\sin(\theta) - 2\gamma\omega + \alpha\sin(\omega_\mathrm{d} t)\,, \tag{2a}$$

$$\dot{\theta} = \omega\,. \tag{2b}$$

Für ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \tag{3}$$

lautet der Runge-Kutta-Algorithmus mit Zeitschritt Δt:

$$\mathbf{m}_0 \coloneqq \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \tag{4a}$$

$$\mathbf{m}_1 \coloneqq \mathbf{f}\left(\mathbf{x} + \frac{1}{2}\,\mathbf{m}_0\,\Delta t, t + \frac{1}{2}\,\Delta t\right) \tag{4b}$$

$$\mathbf{m}_2 \coloneqq \mathbf{f}\left(\mathbf{x} + \frac{1}{2}\,\mathbf{m}_1\,\Delta t, t + \frac{1}{2}\,\Delta t\right) \tag{4c}$$

$$\mathbf{m}_3 \coloneqq \mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{m}_2\,\Delta t, t + \Delta t) \tag{4d}$$

$$\mathbf{x}(t + \Delta t) \coloneqq \mathbf{x}(t) + \frac{1}{6}\,\Delta t\,(\mathbf{m}_0 + 2\mathbf{m}_1 + 2\mathbf{m}_2 + \mathbf{m}_3)\,. \tag{4e}$$

(b) Setzen Sie $\gamma = 0{,}25$, $\omega_\mathrm{d} = 2/3$ und $\Delta t = 0{,}1$, und wählen Sie die Anfangsbedingungen $\theta(0) = 0$ und $\omega(0) = 1$. Stellen Sie für $\alpha = 0$, $\alpha = 0{,}5$, $\alpha = 1{,}2$ und $\alpha = 2{,}2$ die Auslenkung θ als Funktion der Zeit t graphisch dar. Plotten Sie außerdem das Phasenraumporträt des Pendels, d.h., tragen Sie ω über θ auf.

(c) Falls die Ausschläge θ des Pendels klein sind, können Sie die Differentialgleichung (1) linearisieren. Sie erhalten die Gleichung

$$\ddot{\theta} = -\theta - 2\gamma\dot{\theta} + \alpha \sin(\omega_\mathrm{d} t) \tag{5}$$

des getriebenen harmonischen Oszillators. Stellen Sie zusammen, was Sie über die Lösungen dieser Gleichung wissen, und vergleichen Sie mit den Ergebnissen für das nichtlineare Pendel.

Aufgabe 2: Hopf-Bifurkation **15 Punkte**

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\dot{x}_1 = -x_2 + x_1\bigl(\mu - x_1^2 - x_2^2\bigr)\,, \tag{6a}$$
$$\dot{x}_2 = \quad x_1 + x_2\bigl(\mu - x_1^2 - x_2^2\bigr) \tag{6b}$$

mit einem reellen Parameter μ.

(a) Das Gleichungssystem (6) besitzt den Fixpunkt $x_1 = x_2 = 0$. Untersuchen Sie die Stabilität dieses Fixpunktes und beschreiben Sie, wie die Eigenwerte der Jacobi-Matrix sich bei Variation von μ verändern.

(b) Transformieren Sie das Gleichungssystem (6) auf Polarkoordinaten

$$x_1 = r\cos(\varphi)\,, \tag{7a}$$
$$x_2 = r\sin(\varphi)\,, \tag{7b}$$

lösen Sie es, und beschreiben Sie das Verhalten der Lösung für $t \to \infty$.