Übungen zur Vorlesung „Nichtlineare Dynamik I“, WS 2019/20

Blatt 4 vom 26. November 2019

Scheinkriterien: Je 60 % der schriftlichen und der Votierpunkte sowie Vorrechnen.
Schriftliche Abgaben sind in PDF-Form (ein Dokument) beim Tutor per E-Mail abzugeben. Dieses soll geforderte Rechnungen und Diagramme enthalten und mögliche Fragen beantworten. Die Abgabe von Quellcode wird nicht berücksichtigt; bei Fragen hierzu bitte persönlich beim Tutor melden.
Tutor: Johannes Reiff ⟨johannes.reiff@itp1.uni-stuttgart.de⟩

Abgabe: **2019-12-08** Besprechung: **2019-12-11**

Aufgabe 10: Intermittenz — schriftlich, 10 Punkte

(a) Berechnen Sie numerisch die Folge der Iterierten x_n der logistischen Abbildung $x_{n+1} = rx_n(1-x_n)$ für Parameterwerte r knapp unterhalb des Wertes $r_c = 1+\sqrt{8}$, bei dem ein stabiler Zyklus der Periode drei entsteht. Beobachten Sie, wie sich die Folge bei Annäherung an r_c verändert.

(b) Im oberen Teil des Fensters der Periode drei liegt ein chaotischer Attraktor vor, der aus drei Bändern besteht. Bei einem kritischen Parameterwert $r'_c \approx 3{,}857$ vereinigen sich die drei Bänder zu einem einzigen Band. Beschreiben Sie das Verhalten der Folge knapp oberhalb von r'_c.

Aufgabe 11: Kaplan-Yorke-Abbildung — 10 Punkte

Betrachten Sie die zweidimensionale Abbildung

$$x_{n+1} = 3x_n \bmod 1\,, \tag{1a}$$
$$y_{n+1} = \lambda y_n + 2\cos(2\pi x_n) \tag{1b}$$

mit $0 \le x_n \le 1$ und $|\lambda| < 1$.

(a) Es sei R das Rechteck $0 \le x \le 1$, $|y| \le 2/(1-|\lambda|)$. Zeigen Sie, dass R durch die Abbildung (1) in sich abgebildet wird.

(b) Zeigen Sie, dass die Folge für $|\lambda| < 1/3$ und für alle Anfangsbedingungen in R gegen einen Attraktor konvergiert, der das Maß Null hat.

Aufgabe 12: Hénon-Abbildung — schriftlich, 10 Punkte

Schreiben Sie ein Programm, das den größten Lyapunov-Exponenten für die Hénon-Abbildung

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n\,, \tag{2a}$$
$$y_{n+1} = bx_n \tag{2b}$$

mit reellen Parametern a und b und $|b| < 1$ berechnet. Berechnen Sie den Lyapunov-Exponenten für $a = 1{,}4$ und b zwischen 0 und 0,3 mit dem Startpunkt $x_0 = y_0 = 0$.

Hinweis: Wenn $\mathbf{M}(x, y)$ die Linearisierung der Abbildung (2) bezeichnet und

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{M}(x_n, y_n)\mathbf{u}_n \tag{3}$$

mit einem beliebigen Einheitsvektor $\mathbf{u}_0$ gilt, dann ist der größte Lyapunov-Exponent gegeben durch

$$\lambda = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln |\mathbf{u}_n| \,. \tag{4}$$

In der Praxis müssen Sie die Vektoren $\mathbf{u}_n$ nach jedem Iterationsschritt auf die Länge 1 normieren. (Warum?) Überlegen Sie, wie Sie den Lyapunov-Exponenten aus den dazu nötigen Normierungsfaktoren berechnen können.