Übungen zur Vorlesung „Nichtlineare Dynamik I“, WS 2019/20

Blatt 5 vom 10. Dezember 2019

Scheinkriterien: Je 60 % der schriftlichen und der Votierpunkte sowie Vorrechnen.
Schriftliche Abgaben sind in PDF-Form (ein Dokument) beim Tutor per E-Mail abzugeben. Dieses soll geforderte Rechnungen und Diagramme enthalten und mögliche Fragen beantworten. Die Abgabe von Quellcode wird nicht berücksichtigt; bei Fragen hierzu bitte persönlich beim Tutor melden.
Tutor: Johannes Reiff ⟨johannes.reiff@itp1.uni-stuttgart.de⟩

Abgabe: **2020-01-12** Besprechung: **2020-01-15**

Aufgabe 13: Korrelationsdimension seltsamer Attraktoren — schriftlich, 10 Punkte

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass das Korrelationssignal

$$C(l) = \sum_{i=1}^{M(l)} p_i^2 \,, \tag{1}$$

wobei p_i die Wahrscheinlichkeit angibt, mit der eine Trajektorie $\mathbf{x}_i$ ein Kästchen mit Kantenlänge l besucht, geschrieben werden kann als

$$C(l) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^{N} \Theta(l - |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|) \,. \tag{2}$$

Hierbei bezeichnet

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0 \quad \text{und} \\ 1 & \text{für} \quad x \geq 0 \end{cases} \tag{3}$$

die Heaviside-Stufenfunktion. Berechnen Sie numerisch das Korrelationssignal $C(l)$ für die Hénon-Abbildung

$$x_{n+1} = 1 - a x_n^2 + y_n \,, \tag{4a}$$

$$y_{n+1} = b x_n \tag{4b}$$

mit $a = 1{,}4$ und $b = 0{,}3$. Stellen Sie $C(l)$ logarithmisch dar und bestimmen Sie aus der Steigung die Korrelationsdimension D_2 des seltsamen Attraktors

$$D_2 = \lim_{l\to 0} \frac{\log C(l)}{\log l} \,. \tag{5}$$

Aufgabe 14: Mandelbrot-Menge — 10 Punkte

Die Mandelbrot-Menge wird durch einen einfachen Algorithmus erzeugt, der auf der Formel

$$z_{n+1} = z_n^2 + c \quad \text{mit} \quad z_0 = 0 \tag{6}$$

beruht. Dabei sind z_n und c komplexe Zahlen. Mit dieser Formel kann man für jeden Punkt c der komplexen Zahlenebene eine Punktfolge $z_1, z_2, \ldots$ bilden, den sogenannten Orbit. Die Mandelbrot-Menge ist die Gesamtheit aller Punkte c der Ebene, für welche der zugehörige Orbit den Kreis mit Radius 2 um den Ursprung nicht verlässt, d.h. falls

$$|z_n| \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \tag{7}$$

gilt. Nach 100 Iterationen kann abgebrochen werden. Die Punkte der Mandelbrot-Menge werden schwarz gezeichnet. Farbige „Apfelmännchen“ entstehen, indem man die weiteren Punkte c in einer Farbe zeichnet, die davon abhängt, nach wie vielen Iterationen n der zugehörige Orbit den Kreis mit Radius 2 verlässt.

Fertigen Sie eine graphische Darstellung der Mandelbrot-Menge an und erklären Sie ihre Vorgehensweise. Um die Präsentation in der Übung zu vereinfachen, darf die entstandene Abbildung gerne auch im Vorfeld als PDF oder PNG an den Tutor geschickt werden.

Frohe Weihnachten wünscht der fraktale Weihnachtsmann!