Übungen zur Vorlesung „Nichtlineare Dynamik I“, WS 2019/20

Blatt 6 vom 14. Januar 2020

Scheinkriterien: Je 60 % der schriftlichen und der Votierpunkte sowie Vorrechnen.
Schriftliche Abgaben sind in PDF-Form (ein Dokument) beim Tutor per E-Mail abzugeben. Dieses soll geforderte Rechnungen und Diagramme enthalten und mögliche Fragen beantworten. Die Abgabe von Quellcode wird nicht berücksichtigt; bei Fragen hierzu bitte persönlich beim Tutor melden.
Tutor: Johannes Reiff ⟨johannes.reiff@itp1.uni-stuttgart.de⟩

Abgabe: **2020-01-26** Besprechung: **2020-01-29**

Aufgabe 15: Kettenbrüche 10 Punkte

(a) Berechnen Sie die periodischen Kettenbrüche

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}} \quad \text{und} \quad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \dots}}}} \,. \tag{1}$$

(b) Bestimmen Sie die Kettenbruchentwicklungen der Zahlen $41/16$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{8}$ und $\sqrt{6}$.

(c) Für welche natürlichen Zahlen N hat $\sqrt{N}$ eine Kettenbruchentwicklung mit der Periode 1, d.h.

$$\sqrt{N} = K + \frac{1}{n + \frac{1}{n + \dots}} \tag{2}$$

mit natürlichen Zahlen K und n?

Aufgabe 16: Arnold-Zungen schriftlich, 10 Punkte

Betrachten Sie die Kreisabbildung

$$\theta_{n+1} = \left[\theta_n + \Omega - \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi\theta_n)\right] \bmod 1 \,. \tag{3}$$

Zeigen Sie, dass Modenkopplung zur Windungszahl $w = 1/2$ in einem Intervall $\Omega_1 < \Omega < \Omega_2$ existiert, wobei für kleine K gilt

$$\Omega_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{K^2}{8\pi} + \mathcal{O}\big(K^3\big) \,. \tag{4}$$

Aufgabe 17: Teufelstreppe schriftlich, 10 Punkte

Berechnen Sie die „Teufelstreppe“, die die Windungszahl der Kreisabbildung (siehe Aufgabe 16) für $K = 1$ als Funktion von Ω darstellt.

Aufgabe 18: Getriebenes Pendel – analytisch **10 Punkte**

Wir betrachten ein gedämpftes Pendel, das von einer periodischen sowie einer konstanten Kraft getrieben wird:

$$\ddot{\theta} + \delta\dot{\theta} + \sin(\theta) = K + T\sin(\omega t)\,. \tag{5}$$

Der Phasenraum des Systems wird aufgespannt von den Variablen $x_1 = \dot{\theta}$, $x_2 = \theta \bmod 2\pi$ und $x_3 = \omega t \bmod 2\pi$.

(a) Zeigen Sie, dass Volumina im Phasenraum mit der Zeit exponentiell schrumpfen.

(b) Zeigen Sie, dass Flächen in einer Schnittebene mit festem x_3 mit jeder Iteration der Schnittabbildung kleiner werden.

(c) Sei $\theta_0(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung (5). Zeigen Sie, dass für $K = 0$ auch $-\theta_0(t+\pi/\omega)$ eine Lösung ist.

(d) Folgern Sie, dass für $K = 0$ keine quasiperiodischen Lösungen existieren, die einen Torus im Phasenraum dicht ausfüllen.