Aufgabe 20 : Ladung in homogenen Feldern

Berechnen Sie die relativistische Bewegung eines Teilchens mit Ruhemasse m_0 und elektrischer Ladung e in homogenen elektrischen und magnetischen Feldern:

a) für $\boldsymbol{E}$ parallel zu $\boldsymbol{B}$, (2 Punkte)

b) für $\boldsymbol{E}$ senkrecht zu $\boldsymbol{B}$. (2 Punkte)

Aufgabe 21 : Levi-Cività-Tensor

Die kontravianten Komponenten des vollständig antisymmetrischen Levi-Cività-Tensors sind gegeben durch

$$\epsilon^{\mu\nu\sigma\varrho} = \begin{cases} +1 & ;\text{falls } (\mu,\nu,\sigma,\varrho) \text{ gerade Permutation von } (0,1,2,3)\,, \\ -1 & ;\text{falls } (\mu,\nu,\sigma,\varrho) \text{ ungerade Permutation von } (0,1,2,3)\,, \\ 0 & ;\text{sonst}\,. \end{cases}$$

Zeigen Sie: Der Levi-Civita-Tensor ist unter Lorentz-Transformationen ein Tensor vierter Stufe. (2 Punkte)

Aufgabe 22 : Lorentz-Kovarianz der Maxwell-Gleichungen

Die einzelnen Komponenten der elektrischen Feldstärke $\boldsymbol{E}$ und der magnetischen Feldstärke $\boldsymbol{B}$ können als Elemente des antisymmetrischen elektromagnetischen Feldstärketensors F aufgefasst werden. Dessen kontravarianten Komponenten $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ mit μ,$\nu = 0,1,2,3$ sind definiert durch

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ +E_x/c & 0 & -B_z & +B_y \\ +E_y/c & +B_z & 0 & -B_x \\ +E_z/c & -B_y & +B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

a) Berechnen Sie die kovarianten Komponenten des elektromagnetischen Feldstärketensors gemäß

$$F_{\mu\nu} = \eta_{\mu\sigma}\,\eta_{\nu\varrho}\,F^{\sigma\varrho}\,, \tag{2}$$

wobei die kovariante Minkowski-Metrik $(\eta_{\mu\nu}) = \mathrm{d}iag(1,-1,-1,-1)$ zu verwenden ist. (1 Punkt)

b) Der duale elektromagnetische Felstärketensor $\hat{F}$ ist durch Kontraktion des elektromagnetischen Felstärketensors F mit dem vollständig antisymmetrischen Levi-Cività-Tensors ϵ definiert. Geben Sie die kontravarianten Komponenten des dualen elektromagnetischen Felstärketensors an (1 Punkt)

$$\hat{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\epsilon^{\mu\nu\sigma\varrho}\,F_{\sigma\varrho}\,. \tag{3}$$

c) Zeigen Sie, dass sich die homogenen Maxwell-Gleichungen

$$\mathrm{d}iv\,\boldsymbol{B} = 0\,, \qquad\qquad \mathrm{r}ot\,\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{0} \tag{4}$$

mit Hilfe des dualen elektromagnetischen Feldstärketensors $\hat{F}$ zusammenfassen lassen: (2 Punkte)

$$\partial_\mu\,\hat{F}^{\mu\nu} = 0\,. \tag{5}$$

Hierbei sind die kovarianten Komponenten ∂_μ des Vierernablaoperators durch die partiellen Ableitungen nach den kontravarianten Komponenten x^μ des Viererortsvektors definiert, d.h. $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$.

Beweisen Sie, dass sich die inhomogenen Maxwell-Gleichungen

$$\mathrm{d}iv\boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\,\varrho\,, \qquad\qquad \frac{1}{\mu_0}\,\mathrm{r}ot\,\boldsymbol{B} - \varepsilon_0\,\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \boldsymbol{j} \tag{6}$$

mit Hilfe des elektromagnetischen Feldstärketensors F zusammenfassen lassen: (2 Punkte)

$$\partial_\mu\,F^{\mu\nu} = \mu_0\,j^\nu\,. \tag{7}$$

Hierbei bestehen die kontravarianten Komponenten j^μ der Viererstromdichte aus der Ladungsdichte ϱ und den Komponenten der Stromdichte $\boldsymbol{j}$:

$$(j^\mu) = \begin{pmatrix} c\varrho \\ j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix}\,. \tag{8}$$

Leiten Sie aus (7) ab, dass die Viererstromdichte der Kontinuitätsgleichung genügen muss: (1 Punkt)

$$\partial_\mu\,j^\mu = 0\,. \tag{9}$$

d) Führen Sie nun eine Lorentz-Transformation vom ursprünglichen Inertialsystem S in ein dazu gleichförmig bewegtes Inertialsystem S' durch:

$$x'^{\,\mu} = \Lambda^\mu{}_\nu\,x^\nu\,. \tag{10}$$

Wie transformieren sich die kontravarianten Komponenten j^μ der Viererstromdichte und die kovarianten Komponenten ∂_μ des Vierernablaoperators? (1 Punkt)

Leiten Sie aus den inhomogenen Maxwell-Gleichungen (7) ab, wie sich die kontravarianten Komponenten $F^{\mu\nu}$ des elektromagnetischen Feldstärketensors transformieren. (1 Punkt)

e) Spezialisieren Sie Ihre Ergebnisse in Aufgabenteil d) auf die Lorentz-Transformation

$$(\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

mit $\beta = v/c$ und $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$. Leiten Sie die resultierenden Transformationsformeln für die elektrische Feldstärke $\boldsymbol{E}$ und für die magnetische Felstärke $\boldsymbol{B}$ ab: (2 Punkte)

$$\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{B}'(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{E}), \qquad \boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E}'(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{E}). \tag{12}$$

f) Aus dem elektromagnetischen Feldstärketensor F und dem dualen elektromagnetischen Feldstärketensor $\hat{F}$ lassen sich durch Kontraktion zwei Skalare bilden:

$$S_1 = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \qquad S_2 = F_{\mu\nu} \hat{F}^{\mu\nu}. \tag{13}$$

Zeigen Sie, dass die beiden Skalare S_1 und S_2 unter der Lorentz-Transformation (10) invariant sind: (1 Punkt)

$$S_1' = S_1, \qquad S_2' = S_2. \tag{14}$$

Drücken Sie die beiden Skalare S_1 und S_2 in Abhängigkeit der elektrischen Feldstärke $\boldsymbol{E}$ und der magnetischen Feldstärke $\boldsymbol{B}$ aus: (1 Punkt)

$$S_1 = S_1(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}), \qquad S_2 = S_2(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}). \tag{15}$$

Aufgabe 23 : Viererverktorpotential (schriftlich)

a) Leiten Sie aus den homogenen Maxwell-Gleichungen (4) ab, dass sich die elektrische Feldstärke $\boldsymbol{E}$ und die magnetische Feldstarke $\boldsymbol{B}$ durch Differentiationen aus einem skalaren Potential φ und einem Vektorpotential $\boldsymbol{A}$ ableiten lassen: (2 Punkte)

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{B} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A}. \tag{16}$$

b) Setzen Sie (16) in die inhomogenen Maxwell-Gleichungen (6) ein und bestimmen Sie die resultierenden gekoppelten Bewegungsgleichungen für das skalare Potential φ und für das Vektorpotential $\boldsymbol{A}$. (2 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass sowohl (16) als auch die im Aufgabenteil b) abgeleiteten Bewegungsgleichungen unter den lokalen Eichtransformationen

$$\varphi' = \varphi + \frac{\partial \chi}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} - \operatorname{grad}\chi \tag{17}$$

invariant sind, wobei χ eine beliebige Funktion darstellt. (2 Punkte)

d) Das skalare Potential φ und das Vektorpotential $\boldsymbol{A}$ lassen sich zu einem Vierervektorpotential mit den kontravarianten Komponenten

$$(A^\mu) = \begin{pmatrix} \varphi/c \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \tag{18}$$

zusammenfassen. Zeigen Sie durch Vergleich von (1) mit (16), dass zwischen dem elektromagnetischen Feldstärketensor und dem Vierervektorpotential folgender Zusammenhang besteht: (1 Punkt)

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu . \tag{19}$$

Die kontravarianten Komponenten ∂^μ des Vierernablaoperators ergeben sich dabei aus den kovarianten Komponenten ∂_μ durch Heraufziehen des Index

$$\partial^\mu = \eta^{\mu\nu}\,\partial_\nu \tag{20}$$

mit der kontravarianten Minkowski-Metrik $(\eta^{\mu\nu}) = \mathrm{d}iag(1, -1, -1, -1)$.

e) Zeigen Sie, dass durch (19) die homogenen Maxwell-Gleichungen (5) wegen (3) automatisch erfüllt sind. Leiten Sie aus (19) und den inhomogenen Maxwell-Gleichungen (7) die Bewegungsgleichung für das Vierervektorpotential ab. (2 Punkte)

f) Bestimmen Sie die kovariante Formulierung der lokalen Eichtransformation (17):

$$A'^\mu = A'^\mu\,(A^\mu, \chi) . \tag{21}$$

Zeigen Sie, dass sich der elektromagnetische Feldstärketensor (19) durch die lokale Eichtransformation nicht ändert: (1 Punkt)

$$F'^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} . \tag{22}$$

Abgabe der schriftlichen Aufgabe am 18.12.2018 in der Vorlesung.