Übungen zur Vorlesung „Relativitätstheorie I" **WS 2018/19**

Apl. Prof. Dr. J. Main **Blatt 6**

Aufgabe 24 : Aberration **(schriftlich)**

Betrachten Sie ein auf Sie zukommendes Lichtsignal, dessen umgekehrter Ausbreitungsvektor mit den x-Achsen des Laborsystems K und des mit v längs der x-Achse bewegten Systems K_0 die Winkel α bzw. α' einschließt.

Beweisen Sie die Aberrationsformel: (3 Punkte)

$$\tan\frac{\alpha'}{2} = \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^{1/2} \tan\frac{\alpha}{2}\,.$$

Aufgabe 25 : Stereographische Projektion

Es bezeichnen (x^1, x^2, x^3) kartesische Koordinaten im $\mathbb{R}^3$ mit der Euklidischen Metrik $g_{ab} = \delta_{ab}$ $(a,b = 1, 2, 3)$.

a) Geben Sie die kovarianten Komponenten x_a der Koordinaten an. (1 Punkt)

b) Wir betrachten die Kugeloberfläche S^2: $(x^1, x^2, x^3) : x_a x^a = 1$ und transformieren auf neue unabhängige Koordinaten $(\bar{x}^1 = r, \bar{x}^2 = \phi)$ gemäß $x^a = x^a(\bar{x}^i)$:

$$x^1 = \frac{2r\sin\phi}{r^2+1}\,, \quad x^2 = \frac{2r\cos\phi}{r^2+1}\,, \quad x^3 = \frac{r^2-1}{r^2+1} \tag{1}$$

Verifizieren Sie, dass $x_a x^a = 1$. (1 Punkt)

c) Berechnen Sie das Linienelement auf S^2 in den Koordinaten r,ϕ. (2 Punkte)

Anleitung: Bestimmen Sie den Metriktensor $\bar{g}_{ij}$ unter Ausnutzung der Tatsache, dass sich dessen Komponenten kovariant transformieren, $\bar{g}_{ij} = \frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^j} g_{ab}$. Ergebnis:

$$(ds)^2 = \frac{4}{(1+r^2)^2}(dr^2 + r^2 d\phi^2) \tag{2}$$

d) Berechen Sie die Christoffel-Symbole Γ^i_{jk} für den Metriktensor $\bar{g}_{ij}$

i) entweder direkt oder eleganter (2 Punkte)

ii) unter Ausnutzung des Tricks, dass sich die Geodätengleichungen formal aus den Lagrange-Gleichungen 2. Art mit der Lagrange-Funktion $L = \bar{g}_{ij}\frac{d\bar{x}^i}{dt}\frac{d\bar{x}^j}{dt}$ ergibt (beliebiger Bahnparameter t). (2 Punkte)

e) Beweisen Sie, dass die Kurve $r(s) = \tan(s/2)$, $\phi =$ konstant eine Geodäte ist. (1 Punkt)

f) Zeigen Sie, dass die Transformation (1) der stereographischen Projektion der Einheitskugel um ($x^1 = x^2 = x^3 = 0$) mit Ausnahme des „Nordpols“ ($x^1 = x^2 = 0, x^3 = 1$) in die x^1, x^2-Ebene entspricht. (2 Punkte)

Abgabe der schriftlichen Aufgabe am 15.1.2019 in der Vorlesung.