

Aufgabe 26 : Lokales Inertialsystem

Wir betrachten eine Mannigfaltigkeit M , beschrieben durch n Koordinaten x^μ mit der positiv definiten Metrik $g_{\mu\nu}$. Sei $A^\mu(x)$ ein kontravariantes Vektorfeld auf M . In der Vorlesung wird gezeigt, dass $DA^\mu \stackrel{\text{def}}{=} dA^\mu + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu A^\rho dx^\sigma$ ebenfalls ein kontravariantes Vektorfeld ist.

Es wird auf n neue Koordinaten $\bar{x}^\mu = \bar{x}^\mu(x)$ transformiert.

- a) Berechnen Sie, ausgehend von $D\bar{A}^\mu = \partial\bar{x}^\mu/\partial x^\nu DA^\nu$ (warum?), das Transformationsverhalten der Koeffizienten des affinen Zusammenhangs. (2 Punkte)

Ergebnis:

$$\bar{\Gamma}_{\kappa\lambda}^\nu = \frac{\partial\bar{x}^\nu}{\partial x^\mu} \left[\frac{\partial x^\alpha}{\partial\bar{x}^\kappa} \frac{\partial x^\beta}{\partial\bar{x}^\lambda} \Gamma_{\alpha\beta}^\mu + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial\bar{x}^\kappa \partial\bar{x}^\lambda} \right]. \quad (1)$$

- b) Sei $P(x)$ ein beliebiger, fester Punkt auf der Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass es ein Koordinatensystem \bar{x}^μ auf M mit P als Ursprung gibt, in dem die Zusammenhangskoeffizienten in P verschwinden, (2 Punkte)

$$\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha(P) = 0. \quad (2)$$

Anleitung: Betrachten Sie die Transformation $x^\mu = \bar{x}^\mu + \frac{1}{2} Q_{\alpha\beta}^\mu \bar{x}^\alpha \bar{x}^\beta$ mit bezüglich der unteren Indizes symmetrischer Matrix Q und setzen Sie dies in die mit $\partial x^\gamma/\partial\bar{x}^\nu$ multiplizierte Gleichung (1) ein.

- c) Zeigen Sie, dass aus (2) für alle Indizes α, μ, ν folgt: (1 Punkt)

$$\left. \frac{\partial \bar{g}_{\mu\nu}}{\partial \bar{x}^\alpha} \right|_{\bar{x}=0} = 0. \quad (3)$$

- d) Begründen Sie, warum die Koordinaten \bar{x} linear auf Koordinaten \tilde{x} transformiert werden können, dass in P die Metrik die Form

$$\tilde{g}_{\mu\nu}|_{\tilde{x}=P} = \delta_{\mu\nu} \quad (4)$$

annimmt, wobei die Eigenschaften (2) und (3) erhalten bleiben. [Die Eigenschaften (2), (3) und (4) definieren den Begriff eines *lokalen Inertialsystems*.] (1 Punkt)

- e) Zeigen Sie, dass in einer Umgebung von P die Metrik dann in den Koordinaten \tilde{x} geschrieben werden kann als (1 Punkt)

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \tilde{g}_{\mu\nu}}{\partial \tilde{x}^\alpha \partial \tilde{x}^\beta} \right)_{\tilde{x}=0} \tilde{x}^\alpha \tilde{x}^\beta. \quad (5)$$