Übungen zur Vorlesung „Relativitätstheorie II“ **SS 2019**

Apl. Prof. Dr. J. Main **Blatt 3**

Aufgabe 5 : Mit Uhren rund um die Erde **(schriftlich, 20 Punkte)**

Wir betrachten zwei genau gleiche Uhren A und B, die zunächst synchronisiert sind und auf der Erde ruhen. A bleibt in Ruhe, während B in eine Höhe h gebracht wird und die Erde umkreist. Nach einer gewissen Zeit werden die auf A und B verstrichenen Eigenzeiten τ_A und τ_B verglichen.

Nehmen Sie zur Vereinfachung an, dass die Umkreisung am Äquator ($\theta = \pi/2$) geschieht. Gehen Sie von dem lokalen Inertialsystem aus, in dem die Erde im Feld der Sonne frei fällt und in dem sie mit der Winkelgeschwindigkeit $\Omega = d\phi/dt$ rotiert.

a) Berechnen Sie die Differenz der Eigenzeiten in Abhängigkeit vom Bahnradius R_B und Geschwindigkeit v bezüglich des lokalen Inertialsystems. Nähern Sie $r_\mathrm{s} \ll R_B$ und $v \ll c$. (6 Punkte)

b) Drücken Sie die Differenz der Eigenzeiten aus durch die Höhe h über der Erde und die Geschwindigkeit v bezogen auf den Erdboden. Es sei $h \ll R_\mathrm{Erde}$. Werten Sie das Ergebnis aus für ein Flugzeug ($h = 10$ km, $v = \pm 300$ m/s), das die Erde einmal umrundet (z.B. von Quito bis Quito). $R_\mathrm{Erde} = 6370$ km, $r_s = 8{,}85$ mm (6 Punkte)

c) Ein GPS-Satellit umkreist die Erde in 20200 km Höhe. (Wie groß ist also seine Geschwindigkeit im lokalen Inertialsystem?)
Berechnen Sie die Abweichung der Satellitenuhr von der Erduhr pro Tag.
Wenn man davon ausgeht, dass eine Abweichung von 30 ns eine Verschiebung der mittels GPS ermittelten Position um 9 m verursacht, wie groß wäre dann die Verschiebung pro Tag, wenn die relativistischen Effekte beim GPS nicht berücksichtigt würden?
(Sie werden berücksichtigt, indem nicht die Zeitsignale dreier Satelliten mit einer Atomuhr im GPS-Empfänger verglichen werden, sondern die Zeitsignale von vier Satelliten untereinander, die alle der selben Zeitdilatation unterliegen.)(8 Punkte)

Aufgabe 6 : Doppelpulsar **(10 Punkte)**

Zwei Neutronensterne mit Schwarzschild-Radius $r_\mathrm{s} = 3\,\mathrm{km}$ kreisen im Abstand $d = 1{,}4$ Millionen Kilometer um ihren gemeinsamen Schwerpunkt. Einer der Neutronensterne sende in seinem Ruhsystem Radiopulse mit einer Periode von $\tau = 0{,}06\,\mathrm{s}$ aus.

a) Berechnen Sie die Bahnperiode des Systems.

b) Die Pulse werden von einem im Unendlichen in der Bahnebene gelegenen Radioteleskop registriert. Wie ändern sich die Pulsankunftszeiten während eines Umlaufs auf Grund der endlichen Lichtgeschwindigkeit, wie ändern sie sich auf Grund zusätzlicher allgemein relativistischer Effekte?

Aufgabe 7 : Radialer Fall ins Schwarze Loch (schriftlich, 20 Punkte)

Ein Teilchen beginne seinen freien radialen Fall ins gravitierende Zentrum zur Koordinatenzeit $t = 0$ (zugleich Eigenzeit $\tau := 0$) bei der Schwarzschildkoordinate R.

a) Berechnen Sie die Eigenzeit als Funktion der jeweils aktuellen Schwarzschildkoordinate r. Drücken Sie das Ergebnis durch die *Zykloidenkoordinate* $r = R(1+\cos\eta)/2$ (mit $\eta \in [0,\pi]$) aus. Welche Eigenzeit verstreicht bis zum Erreichen von $r = 0$? (8 Punkte)

b) Berechnen Sie die Koordinatenzeit t als Funktion von r. Parametrisieren Sie dazu r ebenfalls durch die Zykloidenkoordinate. Nach welcher Koordinatenzeit erreicht das Teilchen den Schwarzschildhorizont? (8 Punkte)

c) Zeichen Sie qualitativ die Geodäten des radial freifallenden Teilchen im r,t– und r,τ–Diagramm. (4 Punkte)

Aufgabe 8 : Gezeitenbeschleunigung (10 Punkte)

Berechnen Sie die Gezeitenbeschleunigung auf einen ins gravitierende Zentrum radial einfallenden Gegenstand der Ruhelänge ℓ, die er in seinem Ruhesystem beim Passieren des Schwarzschild-Horizontes erfährt ($\ell \ll r_\mathrm{s}$).

Zahlenwerte: $\ell = 2$ m, $M = 6\ M_\odot$ und $M = 3{,}4 \times 10^4 M_\odot$.

Abgabe der schriftlichen Aufgabe in der Vorlesung am 28. Mai 2019.