
Aufgabe 9 : Effektiver Brechungsindex im Gravitationsfeld (schriftlich, 15 Punkte)

a) Führen Sie im Schwarzschild-Linienelement

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

eine Transformation auf isotrope Koordinaten durch, indem Sie eine Radialkoordinate \bar{r} definieren durch

$$r = \left(1 + \frac{r_s}{4\bar{r}}\right)^2 \bar{r}.$$

Zeigen Sie, dass das Linienelement die Gestalt

$$ds^2 = \left(\frac{1 - r_s/4\bar{r}}{1 + r_s/4\bar{r}}\right)^2 c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{r_s}{4\bar{r}}\right)^4 d\bar{\mathbf{x}}^2$$

mit

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \bar{r} \sin \theta \cos \varphi \\ \bar{r} \sin \theta \sin \varphi \\ \bar{r} \cos \theta \end{pmatrix}$$

annimmt.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Metrik die lokale Lichtgeschwindigkeit v_{Licht} und zeigen Sie, dass für den Brechungsindex n in erster Ordnung in r_s/r gilt

$$n = \frac{c}{v_{\text{Licht}}} = 1 + \frac{r_s}{r}.$$

Aufgabe 10 : Kruskal-Szekeres-Koordinaten (schriftlich, 15 Punkte)

Zeigen Sie, dass in den Kruskal-Szekeres-Koordinaten

$$\begin{aligned} r > r_s : \quad X &= \sqrt{r/r_s - 1} \exp(r/2r_s) \cosh(ct/2r_s) \\ T &= \sqrt{r/r_s - 1} \exp(r/2r_s) \sinh(ct/2r_s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r < r_s : \quad X &= \sqrt{1 - r/r_s} \exp(r/2r_s) \sinh(ct/2r_s) \\ T &= \sqrt{1 - r/r_s} \exp(r/2r_s) \cosh(ct/2r_s) \end{aligned}$$

die Schwarzschild-Metrik (bei festen Winkeln) die Form

$$ds^2 = \frac{4r_s^3}{r} \exp(-r/r_s) (dT^2 - dX^2)$$

annimmt.

Aufgabe 11 : Fermienergie in weißen Zwergen

(15 Punkte)

Schätzen Sie ab, wie hoch die Fermienergie des Elektronengases in einem weißen Zwergstern der kritischen Dichte ρ_c ist. Vergleichen Sie mit der Fermienergie des Elektronengases in Festkörpern.

Aufgabe 12 : Zusammensetzung von Neutronensternen

(15 Punkte)

Wieviel Prozent eines ungeladenen Neutronensternes mit dem Radius $R = 10^4$ m und der Masse $M = 1,4 M_\odot = 2,8 \cdot 10^{30}$ kg müssen aus Elektronen und Protonen bestehen, damit der Stern gegen Neutronenzerfall $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ stabil ist?

$$m_p = 1,672\,649 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 938,278 \text{ MeV}/c^2,$$

$$m_n = 1,674\,955 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 939,573 \text{ MeV}/c^2,$$

$$m_e = 9,109\,54 \cdot 10^{-31} \text{ kg} = 511,003 \text{ keV}/c^2.$$

Abgabe der schriftlichen Aufgaben in der Vorlesung am 18. Juni 2019.