
Aufgabe 13 : Helligkeits-Rotverschiebungs-Beziehung (schriftlich, 30 Punkte)

Die scheinbare Helligkeit S ist eine wichtige Messgröße in der Astrophysik. Um zu Aussagen über die Entwicklung des Universums zu gelangen, muss sie mit einer zweiten Messgröße, der Rotverschiebung z, in Verbindung gebracht werden. Gehen Sie dazu von der folgenden Situation aus: Eine Lichtquelle sende im Universum, das durch die Robertson-Walker-Metrik

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{c}^2\mathrm{d}t^2 - a(t)^2 \left[\frac{1}{1-qr^2}\mathrm{d}r^2 + r^2\left(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin(\vartheta)^2\mathrm{d}\varphi^2\right)\right] \tag{1}$$

beschrieben werden kann, am Ort $r = 0$ zur Zeit t_0 im Intervall Δt_0 N Photonen der Energie $N\hbar\omega_0 = I_0\Delta t_0$ aus. Zur Zeit t_1 werden diese Photonen nach isotroper Ausbreitung im Abstand r rotverschoben mit $\omega_1 = \omega_0 a(t_0)/a(t_1)$ registriert.

a) Begründen Sie, warum diese am Ort r mit der Intensität (der scheinbaren Helligkeit)

$$S = \frac{I_0\, a(t_0)^2}{4\pi\, a(t_1)^4\, r^2} \tag{2}$$

wahrgenommen werden. (5 Punkte)

b) Für kleine Rotverschiebungen genügt es, $a(t)$ in einer Reihenentwicklung zu betrachten. Geben Sie $a(t)$ bis zur quadratischen Ordnung in t um den Beobachtungszeitpunkt t_1 an und drücken Sie die Entwicklungskoeffizienten durch die Hubble-Zahl $H(t_1) = \dot{a}(t_1)/a(t_1)$ und den Verzögerungsparameter $b(t_1) = -\ddot{a}(t_1)/(H(t_1)^2 a(t_1))$ aus. (3 Punkte)

c) Berechnen Sie mit der Entwicklung von $a(t)$ aus Teil b) die rein radiale Lichtausbreitung in der Robertson-Walker-Metrik. Zeigen Sie, dass sich in quadratischer Näherung in der Zeitdifferenz $t_1 - t_0$

$$r = \frac{\mathrm{c}}{a(t_1)}\left[t_1 - t_0 + \frac{1}{2}H(t_1)(t_1 - t_0)^2\right] \tag{3}$$

ergibt. (12 Punkte)

d) Eliminieren Sie mit Hilfe des Ergebnisses aus Teil b) in Gleichung (3) die Zeitdifferenz $t_1 - t_0$ und drücken Sie das Produkt $a(t_1)r$ durch die Rotverschiebung $z = a(t_1)/a(t_0) - 1$ aus. Entwickeln Sie das Ergebnis bis zur quadratischen Ordnung in z. (5 Punkte)

e) Zeigen Sie damit, dass die Helligkeits-Rotverschiebungs-Beziehung für kleine z

$$S = \frac{I_0 H(t_1)^2}{4\pi\mathrm{c}^2}\frac{1-(1-b)z}{z^2} \tag{4}$$

lautet. (5 Punkte)

Aufgabe 14 : Kritische kosmologische Konstante (15 Punkte)

Die Friedmann-Gleichung (mit kosmologischer Konstante $\Lambda \neq 0$) lautet:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi}{3} G\sigma_0 a^3(t_0) \cdot \frac{1}{a(t)} - qc^2 + \frac{\Lambda}{3} c^2 \, a^2(t)$$

mit der heutigen Massendichte σ_0.

a) Zeigen Sie, dass für positive Krümmung ein Urknall vermieden werden kann, wenn gilt:

$$0 < \Lambda < \Lambda_c = \frac{c^4}{(4\pi G\sigma_0 a^3(t_0))^2}$$

Skizzieren Sie für diesen Fall den Verlauf der Funktion $\dot{a}(a)$ und markieren Sie in Ihrer Skizze den minimalen Radius, den das Universum annehmen kann. (10 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass für positive Krümmung und $\Lambda = \Lambda_c$ ein statisches Universum möglich ist. Ist die Lösung stabil? (5 Punkte)

Aufgabe 15 : Ereignishorizont der de Sitter-Metrik (15 Punkte)

Die de Sitter-Metrik wird beschrieben durch das Längenelement

$$\mathrm{d}s^2 = c^2 \mathrm{d}t^2 - \mathrm{e}^{2Ht} \left(\mathrm{d}r^2 + r^2 \mathrm{d}\Omega^2 \right) \tag{5}$$

mit der Hubble-Konstanten H.

In einem de Sitter-Universum sende eine Lichtquelle mit einer Radialkoordinate r_0 zum Zeitpunkt t_0 ein Signal aus. Berechnen Sie, zu welchem Zeitpunkt ein Beobachter bei $r = 0$ das Signal empfängt. Empfängt er alle Signale?

Aufgabe 16 : Zwillingsparadoxon in der de Sitter-Metrik (freiwillig)

In der SRT haben wir diskutiert, dass ein Mensch prinzipiell zu mehreren Hundert Lichjahren entfernten Objekten und wieder zurück zur Erde reisen kann, sein auf der Erde gebliebener Zwilling bei seiner Rückkehr jedoch bereits verstorben ist. In dieser Aufgabe wollen wir nun das Zwillingsparadoxon in der räumlich expandierenden de Sitter-Metrik betrachten. Die Reise eines Zwillings soll mit Anfangsgeschwindigkeit Null auf der Erde starten und in drei Abschnitten mit jeweils konstanter Beschleunigung $\alpha = \pm g$ in radialer Richtung ($\mathrm{d}\Omega = 0$) erfolgen. Der Schubumkehr soll zu den zwei geeignet gewählten Zeitpunkten τ_1 und τ_2 so erfolgen, dass bei der Rückkehr zur Erde eine sanfte Landung mit Geschwindigkeit $v = 0$ stattfindet.

a) Berechnen Sie die Christoffel-Symbole der de Sitter-Metrik und zeigen Sie, dass für eine radiale Bewegung ($\mathrm{d}\Omega = 0$) die Viererbeschleunigung durch

$$a^\mu = \left(a^t,a^r,a^\vartheta,a^\varphi\right) = \left(t'' + \frac{H\mathrm{e}^{2Ht}}{c^2}r'^2,r'' + 2Hr't',0,0\right) \tag{6}$$

gegeben ist, wobei der Strich die Ableitung nach der Eigenzeit des Reisenden bezeichnet.

b) Benutzen Sie die sich aus $g_{\mu\nu}a^\mu a^\nu = -\alpha^2$ (warum?) und $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = c^2$ ergebenden Relationen

$$r'^2 = c^2(t'^2 - 1)\mathrm{e}^{-2Ht}\ , \qquad \frac{r''}{r'} = \frac{t't''}{t'^2 - 1} - Ht' \tag{7}$$

und leiten Sie hieraus die Differentialgleichung

$$\left(\frac{\alpha}{c}\right)^2 = t'^2(t'^2 - 1)\left(\frac{t''}{t'^2 - 1} + H\right)^2 - [t'' + H(t'^2 - 1)]^2 \tag{8}$$

ab. Die Lösung der Differentialgleichung (8) mit den Randbedingungen $t(0) = 0$, $t'(0) = 1$ lautet

$$t(\tau) = \frac{1}{H}\ln\left[\frac{HS\mathrm{e}^{2q\tau} + 2SD\mathrm{e}^{q\tau} - HD}{2q^2\mathrm{e}^{q\tau}}\right] \tag{9}$$

mit den Abkürzungen $q \equiv \sqrt{(\alpha/c)^2 + H^2}$, $S \equiv q + H$ und $D \equiv q - H$. Für die Radialkoordinate mit den Randbedingungen $r(0) = 0$, $r'(0) = 0$ ergibt sich

$$r(\tau) = \frac{2\alpha q(H - S\mathrm{e}^{q\tau})}{HS(HS\mathrm{e}^{2q\tau} + 2SD\mathrm{e}^{q\tau} - HD)} + \frac{\alpha}{HS}\ . \tag{10}$$

c) Berechnen Sie den maximalen Abstand r_∞, den der mit konstanter Beschleunigung $\alpha = g$ gestartete Zwilling erreichen kann.

d) Der reisende Zwilling sende in regelmäßigen Abständen Lichtsignale aus. Wann erreichen die Signale die Erde? Berechnen Sie den Zeitpunkt τ des letzten Lichtsignals, das die Erde noch erreicht. Diskutieren Sie hieraus resultierende Einschränkungen, durch Schubumkehr zur Erde zurückkehren zu können. Welche Bedingung muss erfüllt sein?

e) Diskutieren Sie (qualitativ), wie die Zeitabschnitte für die Beschleunigung mit $\alpha = \pm g$ gewählt werden müssen, um mit Geschwindigkeit $r' = 0$ zur Erde zurückzukehren und vergleichen Sie die Reisen in der de Sitter und der Minkowski-Metrik.

Literatur:
W. Rindler, Phys. Rev. **119**, 2082 (1960)
S. Boblest, T. Müller, and G. Wunner, Eur. J. Phys. **32**, 1117 (2011), `http://iopscience.iop.org/0143-0807/32/5/001`

Abgabe der schriftlichen Aufgaben in der Vorlesung am 2. Juli 2019.