TP1: Klassische Mechanik
SS 2019

Universität Stuttgart

Arbeitsblatt 1 08.04.2019

Mathematische Werkzeuge I

Laut Galileo Galilei ist "Mathematik die Sprache der Natur". Ohne Mathematik ist Physik also nicht möglich. Ziel dieses Arbeitsblattes ist es, ein paar Grundkenntnisse aus dem letzten Semester aufzufrischen und Grundwerkzeuge zu üben.

Aufgabe 1: Differenzieren

(a) Bilden Sie die totale Ableitung der folgenden Funktionen

- (a) $\frac{1}{2}\exp\left(ax^2\right)\cdot\sin^2\left(\frac{x}{b}\right)$
- (b) $\frac{3c}{\sqrt{(4-x^2)}}$
- (c) $\frac{a\cdot x^3}{(a+2x)^2}$

(b) Gegeben sei die Trajektorie $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r_0 e^{-\omega t} \\ r_0\cos^2(4\omega t) \end{pmatrix}$. Berechnen Sie

- (d) die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ und die Beschleunigung $\vec{a}(t)$
- (e) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r}(t)\cdot\vec{v}(t))$

Aufgabe 2: Partielles Differenzieren

(a) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen bzgl. aller Variablen (x, y, z) der folgenden Funktionen

- (a) $f(x,y) = \sin(x^2 - y)$
- (b) $g(x,y) = \ln(2x + \frac{4}{y})$
- (c) $h(x,y) = \ln(x + y^2) - e^{2xy} + 3x$
- (d) $k(x,y,z) = e^{x-y}\cos(5z)$
- (e) $l(x,y) = xy^2(\sin x + \sin y)$

Aufgabe 3: Vektoren

Betrachten Sie

$$\begin{aligned}\vec{a} &= 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3\\ \vec{b} &= -3\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3\\ \vec{c} &= \vec{e}_1 + 7\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3\end{aligned}$$

mit $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ eine Orthonormalbasis ($\rightarrow \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$, mit δ_{ij} das Kronecker Delta)

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases}$$

Berechnen Sie

(a) $|\vec{a}|$

(b) den Einheitsvektor $\vec{u}$ parallel zu $\vec{a}$

(c) $|2\vec{a} + 2\vec{b} - 2\vec{c}|$

(d) den Winkel zwischen $-\vec{b}$ und $-\vec{c}$

(e) das Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$

Aufgabe 4: Matrizen

(a) Seien $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ gegeben.

Berechnen Sie $D = (A + B)^T C$ und die Spur von D: $\mathrm{Sp}(D)$.

(b) Berechnen Sie $\det(E)$, für $E = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.

(c) Berechnen Sie die Inverse E^{-1} zu $E = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.

(d) Berechnen Sie die Eigenwerte von $F = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(e) Diagonaliseren Sie $F = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.