Arbeitsblatt 3 23.04.2019

Kinematik

Auf diesem Blatt behandeln wir einfache mechanische Probleme, die wir mithilfe von Bahnkurven beschreiben und lösen können, ohne die Ursache der Bewegungen zu kennen.

Aufgabe 1: Parabolische Bootsfahrt (3 Punkte)

Ein Boot steuere einen Kurs senkrecht zu einem Ufer eines geraden Flusses der konstanten Breite b und habe dabei die konstante Geschwindigkeit v_0 relativ zum umgebenden Flusswasser. Die Strömungsgeschwindigkeit des Flusswassers habe ein parabolisches Profil mit der Maximalgeschwindigkeit v_m in der Flussmitte und der Geschwindigkeit $v = 0$ am Flussufer. Bestimmen Sie die Bahnkurve des als Massenpunktes idealisierten Bootes und die Lage des Landungspunktes am anderen Ufer relativ zum Startpunkt des Bootes. Dabei sei angenommen, dass das Boot in einem mit v_0 relativ zum Ufer bewegenden Bezugssystems die Geschwindigkeit v_f hat. Dabei ist v_f die Geschwindigkeit des unmittelbar umgebenden Flusswassers relativ zum Ufer.

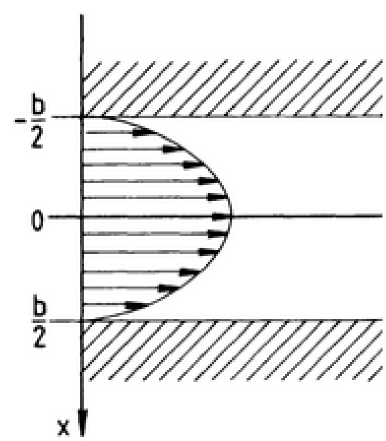

Abbildung 1: Strömungsprofil

Aufgabe 2: Bewegungsgleichung eines Teilchens in der Nähe der Erdoberfläche (3 Punkte)

Betrachten Sie die Bewegungsgleichung $\ddot{\vec{r}} = -\vec{g}$ (1) eines Teilchens im Erdfeld nahe der Erdoberfläche. Es sei angenommen, dass die x_3-Achse eines kartesischen Koordinatensystems vertikal nach oben weise. Somit ergibt sich

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix} \tag{1}$$

a) Wie lautet die Lösung der Bewegungsgleichung (1), wenn das Teilchen zur Zeit $t = 0$ im Koordinatenursprung mit der Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0 = (v_{0_1}, v_{0_2}, v_{0_3})$ ist?

b) Zeigen Sie, dass die Bewegung des Teilchens in einer festen Ebene erfolgt. Bestimmen Sie die Flächennormale dieser Ebene.

c) Wählen Sie nun die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit als x_1-Achse eines neuen Koordinatensystems mit dem gleichen Ursprung wie das ursprüngliche Koordinatensystem. Dabei sei $\hat{e}'_1$ der Einheitsvektor, der in Richtung der x_1-Achse zeigt. Finden Sie nun einen weiteren Einheitsvektor $\hat{e}'_2$ dieses neuen Koordinatensystems, der in der Ebene, in der die Bewegung des Teilchens stattfindet, liegt.

d) Bestimme nun $\hat{e}'_3$ so, dass $\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3$ ein orthonormales Rechtssystem bilden.

Aufgabe 3: Krummlinige Bewegung **(4 Punkte)**

Gegeben sei die Bahnkurve

$$\vec{r}(t) = \left(3\sin\left(\frac{t}{t_0}\right), \quad 4\frac{t}{t_0}, \quad 3\cos\left(\frac{t}{t_0}\right)\right) \tag{2}$$

Berechnen Sie:

a) die Bogenlänge $s(t)$, wobei $s(t = 0) = 0$ sein möge.

b) den Tangentialvektor $\hat{\tau}$ an die Kurve $\vec{r}(t)$.

c) die Krümmung $\kappa = |d\hat{\tau}/ds|$ und den Krümmungsradius $\rho = \kappa^{-1}$ der Kurve $\vec{r}(t)$.

d) den Normaleneinheitsvektor $\hat{n}$.

e) den Einheitsvektor $\hat{b}$ senkrecht zur Ebene $(\hat{\tau}, \hat{n})$ für $t = 5\pi t_0$.

Aufgabe 4: Abrollendes Rad **(freiwillige Bonusaufgabe)**

Ziel dieser Aufgabe ist die Beschreibung der Kurve, die ensteht, wenn ein Kreis mit Radius R über einer Horizontalen mit Geschwindigkeit v_0 abgerollt wird, siehe Bild 2. Dabei wird ein fixer Punkt P auf dem Kreis betrachtet, der bei $t = 0$ sich am Ursprung O befindet.

a) Bestimmen Sie die Trajektorie $\vec{x}(t) = OP$ für $t \geq 0$.
Tipp: Dekonstruieren Sie die Bewegung in ihre Teilelemente und überlegen Sie sich wie der Winkel $\Theta(t)$ beschrieben wird.

b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeits-/Beschleunigungskomponenten der Trajektorie sowie deren Beträge.

Die erhaltene Kurve ist eine sogenannte Zykloide. In Bild 3 sind Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung der Kurve auf dem Kreis angegeben. Zu jedem Zeitpunkt zeigt die Geschwindigkeit in Richtung der Rollgeschwindigkeit, während die Beschleunigung stets in Richtung des Mittelpunktes des Kreises zeigt. Der Punkt P muss sich nicht zwangsläufing auf dem Kreis befinden. Dies führt zu verkürzten oder verlängerten Zykloiden.

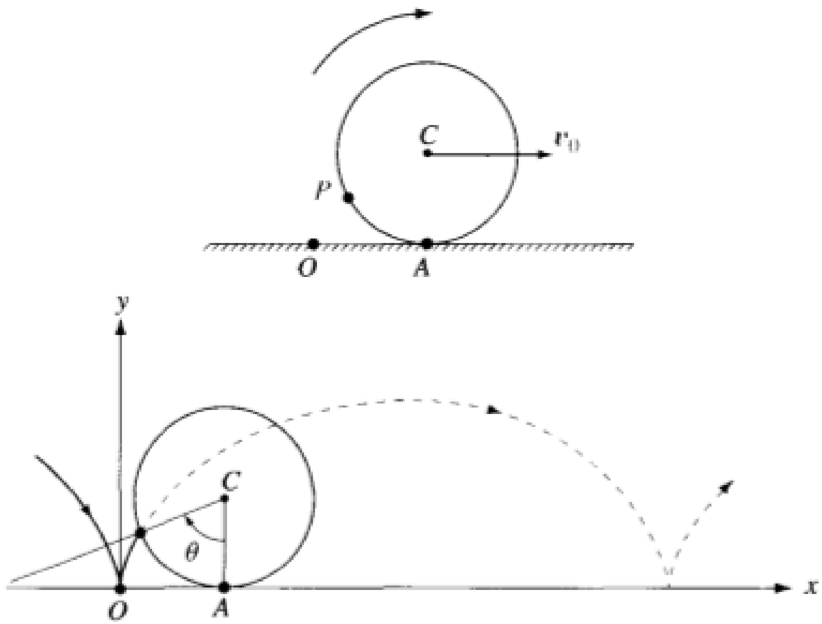

Abbildung 2: Zykloidenillustration

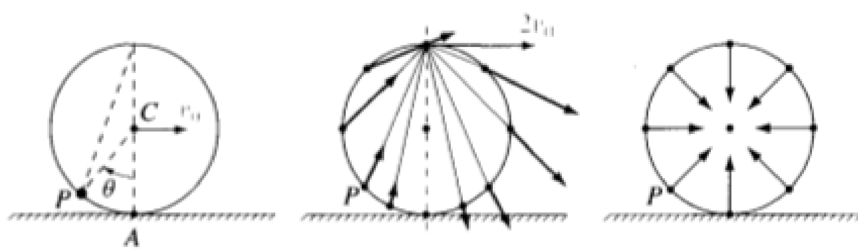

Abbildung 3: Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung der Zykloide.

Moderne Literatur

Kinematik wird nicht nur benutzt um Planetenbahnen zu beschreiben, sondern auch in der Robotik: J. W. Burdick, J. Radford und G. S. Chirikjian, *A 'sidewinding' locomotion gait for hyper-redundant robots*, Advanced Robotics **9**, 195-216 (1994).