Arbeitsblatt 4 30.04.2019

Rechnen in krummlinigen Koordinaten

Auf diesem Blatt behandeln wir das Rechnen in krummlinigen Koordinaten, welche in der Physik unverzichtbar sind. Wir werden sehen, dass Transformationen in andere Koordinatensystem von großem Vorteil sind um spezifische mechanische Probleme zu vereinfachen.

Aufgabe1: Krummlinige Koordinaten (2 Punkte)

Beschreibung von Punkten mittels verschiedener Koordinatensysteme.

(a) Berechnen Sie die Polarkoordinaten von $(x, y) = (3, 3)$ und $(x, y) = (-1, \sqrt{3})$.
Berechnen Sie die kartesischen Koordinaten von $(r, \Phi) = (1, \pi)$ und $(r, \Phi) = (4, \frac{4\pi}{3})$.

(b) Berechnen Sie die Zylinderkoordinaten von $(x, y, z) = (-2, 2, 3)$.
Berechnen Sie die kartesischen Koordinaten von $(\rho, \Phi, z) = (3, \frac{\pi}{3}, -4)$.

(c) Berechnen Sie die Kugelkoordinaten von $(x, y, z) = (2\sqrt{3}, 6, -4)$.
Berechnen Sie die kartesischen Koordinaten von $(\rho, \Phi, \Theta) = (8, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6})$.

(d) Berechnen Sie die Kugelkoordinaten von $(\rho, \Phi, z) = (1, \frac{\pi}{2}, 1)$.

(e) Drücken Sie die Gleichung $x^2 - y^2 = 25$ in Zylinderkoordinaten aus.

(f) Drücken Sie die Gleichungen $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ und $x + y + z = 1$ in Kugelkoordinaten aus.

Aufgabe 2: Die Polarkoordinaten (3 Punkte)

In dieser Aufgabe werden Beispiele von Bewegungen betrachtet, die aufzeigen welche Vorteile ein Koordinatenwechsel bringen kann.

(a) Berechnen Sie zunächst aus der Parametrisierung der Polarkoordinaten $\vec{r} = r\cos\Theta\vec{e}_x + r\sin\Theta\vec{e}_y$ dessen Einheitsvektoren $\vec{e}_r, \vec{e}_\Theta$. Berechnen Sie weiter die zeitliche Ableitung dieser Einheitsvektoren und wie sie voneinander abhängen.

(b) Betrachten Sie eine allgemeine Parametrisierung eines Massepunktes $\vec{R}(t) = r(t)\vec{e}_r(t)$. Bestimmen Sie den Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$ und den Beschleunigungsvektor $\vec{a}$. Berechnen Sie zusätlich deren Beträge und geben Sie die Geschwindigkeits-/ Beschleunigungskomponenten v_r, v_Θ, a_r, a_Θ an.

(c) Als erstes Beispiel betrachen Sie die Kreisbewegung eines Massepunktes. Die Bewegung erfolge mit konstantem Radius $r = R$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ starte der Punkt bei $\Theta(0) = 0$. Die Anfangswinkelgeschwindigkeit sei $\dot{\Theta}(0) = \omega$. Die Winkelfrequenz werde konstant beschleunigt $\ddot{\Theta} = \alpha$. Bestimmen Sie die Trajektorie des Massepunktes in Polarkoordinaten, sowie die Geschwindigkeits-/Beschleunigungskomponenten in Polarkoordinaten.
Geben Sie ebenfalls die obigen Terme in kartesischen Koordinaten an. Vergleichen Sie die Komplexität der Terme dieser beiden Parametrisierungen.

(d) Betrachten Sie nun die Bewegung eines Massepunktes auf einer Gerade definiert durch $y = y_0$. Der Punkt sei zu $t = 0$ auf der y-Achse. Der Punkt bewege sich mit konstanter Geschwindigkeit $\dot{x} = v_0$. Bestimmen Sie die Trajektorie zunächst für das einfachere Koordinatensystem. Bestimmen Sie dafür ebenfalls die Geschwindigkeits- und Beschleunigungskomponente.
Unter Zuhilfenahme des einfacheren Koordinatensystems, berechnen Sie die Trajektorie, sowie die Geschwindigkeits- und Beschleunigungskomponenten des zweiten Koordinatensystems.

(e) Betrachten Sie nun abschließend eine Spiralbewegung in Polarkoordinaten. Der Massepunkt bewege sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\dot{\Theta} = \omega$. Radial sei die Parametrisierung $r = r_0 e^{\beta t}$ gegeben, mit einem reellem β. Berechnen Sie die radiale Komponente der Geschwindigkeit v_r und Beschleunigung a_r. Betrachten Sie den Fall $\beta = \pm\omega$. Was können Sie über a_r, v_r sagen? Skizzieren Sie die Bewegung und versuchen Sie das Ergebnis rechtzufertigen.

Aufgabe 3: Schraubenförmige Bewegung (3 Punkte)

Gesucht sind die Bahnkurve, Geschwindigkeit und Beschleunigung eines Punktteilchens, welches sich mit konstanter Geschwindigkeit v_0 entlang einer Schraubenbahn mit Radius R bewegt (siehe Abb. 1). Nach jedem Umlauf legt das Punktteilchen dabei eine Distanz h entlang der z-Achse zurück. Gehen Sie zur Lösung des Problems in Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) über.

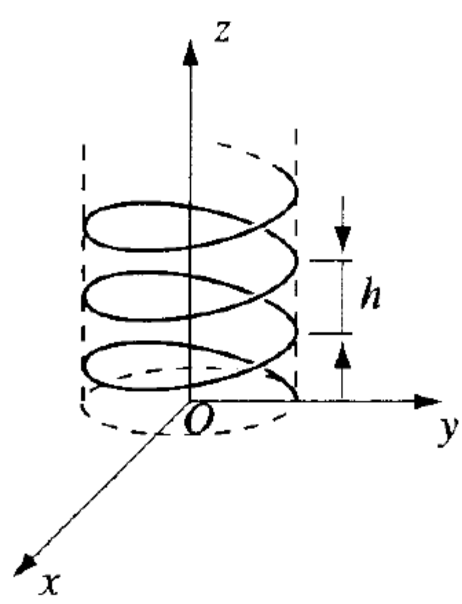

Abbildung 1: Bahnkurve Aufgabe 3

(a) Geben Sie die Bahnkurve ohne explizite Zeitabhängigkeit an.

(b) Finden Sie einen Ausdruck für die Winkelgeschwindigkeit ω_0 des Teilchens in Abhängigkeit des Betrags seiner Geschwindigkeit v_0. Geben Sie hiermit die explizite Zeitabhängigkeit des Winkels $\varphi(t)$ an.
Tipp: Aus welchen Geschwindigkeiten setzt sich v_0 in Zylinderkoordinaten zusammen?

(c) Nutzen Sie die Ergebnisse aus a) und b) um jeweils eine Gleichung für die Geschwindigkeit und Beschleunigung des Teilchens anzugeben.

(d) Bestimmen Sie den Krümmungsradius R_C der Bahnkurve unter Zuhilfename der Zentrifugalbeschleunigung $\vec{a_z} = \frac{v_0^2}{R_C}\hat{e}_\rho$. Was stellen Sie dabei fest?

Aufgabe 4: Rechnen in Kugelkoordinaten (freiwillige Bonusaufgabe)

(a) Betrachten Sie die Bahnkurve eines Punktteilchens $\vec{r} = r(t)\vec{e_r}(t)$. Berechnen Sie nun die Geschwindigkeit und die Beschleunigung von $\vec{r}(t)$ in Kugelkoordinaten.

(b) Gegeben Sei das Kraftfeld $\vec{F}$ in kartesischen Koordinaten

$$\vec{F}(\vec{r}) = -G(x^2 + y^2 + z^2)^{-1,5}$$

Geben Sie $\vec{F}$ in Kugel - und Zylinderkoordinaten an.

Moderne Literatur

Koordinatensysteme in der Praxis:
D. E. Whitney, *The mathematics of coordinated control of prosthetic arms and manipulators*, ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Dec. 1972, pp. 303-309.