Universität Stuttgart

Arbeitsblatt 5 07.05.2019

Newtonsche Bewegungsgleichungen in der Praxis

Auf diesem Blatt wenden wir den Formalismus der Newtonschen Bewegungsgleichungen auf verschiedene Probleme an. Insbesondere betrachten wir dabei Systeme mit Reibung sowie Gravitationskräfte.

Aufgabe 1: Zweimal integrieren bitte (2 Punkte)

Für einen Massenpunkt sei die Beschleunigung $a = a_0 \sin(\omega t + \alpha)$ mit $a_0 \neq 0$ und $\omega \neq 0$ gegeben. Berechnen Sie die Bahn $r(t)$ des Masenpunkts speziell für $\alpha = 0$ und $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, wobei die Anfangsbedingungen gegeben sind zu $r(0) = 0$ und $\dot{r}(0) = 0$.

Aufgabe 2: Schlitten mit Reibung (4 Punkte)

Ein Eskimo schiebt einen Schlitten mit Masse $m = 100$ kg entlang der x-Achse (siehe Fig. 1) vom Startpunkt O bis zum Punkt A. An diesem Punkt gleitet er mit dem Schlitten dann eine schiefe Ebene mit Neigunswinkel α bis zum Punkt B hinab. Während der Schlitten in Bewegung ist wirkt zwischen ihm und dem Boden eine Reibungskraft $F_R = KN$, wobei K der Reibungskoeffizient und N die Normalkraft bzgl. der Ebene ist. Gehen Sie in der Aufgabe außerdem davon aus, dass $g = 10$ m/s^2 gilt. Zur Berechnung zerlegen wir die Bahn in zwei Teilabschnitte $\overline{OA}$ and $\overline{AB}$.

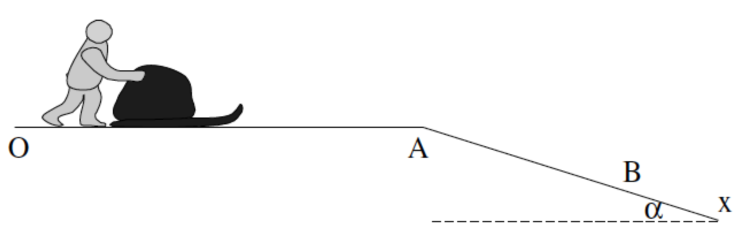

Abbildung 1: Aufgabe 2

Bewegung auf der Horizontalen $\overline{OA}$

Zu Beginn sei der Schlitten in Ruhe am Punkt O. Der Eskimo muss eine Mindestkraft $F_0 = 100\text{N}$ aufwenden um den Schlitten in Bewegung zu setzen. Danach schiebt er den Schlitten mit einer zeitabhängigen Kraft $F(t) = F_0(1 + \frac{t}{\tau})$ an.

(a) Drücken Sie die Mindestkraft F_0 durch K, m, g aus.

(b) Bestimmen Sie die Trajektorie $x(t)$ and Geschwindigkeit $v(t)$ in Abhängigkeit von τ, F_0 und m.

(c) Der Punkt A wird nach 10 s erreicht. Die Geschwindigkeit sei an dem Punkt gegeben durch $v(A) = 5$ m/s. Bestimmen Sie hieraus die Konstanten K, τ sowie die Länge der Strecke $\overline{OA}$.

Bewegung auf der Schrägen $\overline{AB}$

Am Punkt A angekommen springt der Eskimo ($m = 60$ kg) auf seinen Schlitten auf und gleitet die Schräge hinab.

(a) Bestimmen Sie den Wert des Neigungswinkel α ab dem die Geschwindigkeit des Eskimos zunimmt. (*Hinweis: Der Eskimo beginnt seine Talfahrt mit der Geschwindigkeit $v(A) = 5$ m/s*).

(b) Der Eskimo möchte den Punkt B, der 2 km von A entfernt ist, erreichen ohne den Schlitten noch ein weiteres Mal anschieben zu müssen. Die Neigungswinkel sei $\alpha = 4.57°$. Bestimmen Sie Trajektorie $x(t)$ und Geschwindigkeit $v(t)$. Ermitteln Sie hieraus den Wert den die Reibungskonstante K besitzen muss um den Punkt B zu erreichen.

Aufgabe 3: Radiale Fluchtgeschwindigkeiten (4 Punkte)

Betrachten Sie die Gravitation zweier Körper. Ein Körper der Masse M befinde sich am Ursprung O im Raum. Im Abstand a zu diesem befinde sich ein zweiter Körper mit Masse m am Punkt P. Der Körper am Punkt P entferne sich in radialer Richtung von O, mit Geschwindigkeitbetrag $|\vec{u}|$. Die Gravitationskraft ist gegeben, mit G der Gravitationskonstante, durch

$$\vec{F} = -\frac{mMG}{r^2}\vec{e}_r. \tag{1}$$

(a) Bestimmen Sie für welche Anfangsgeschwindigkeiten der Körper im Punkt P aus dem Gravitationsfeld des Körpers am Punkt O entkommt. Dies ist der Fall, wenn der Körper in der Lage ist $r = \overline{OP} = \infty$ zu erreichen. Hinweis: Im eindimensionalen Fall gilt die Identität $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr}\frac{dr}{dt} = \frac{dv}{dr}v$.

(b) Berechnen Sie für den Fall $|\vec{u}| = \sqrt{\frac{MG}{a}}$ den maximalen Abstand r_{max} zwischen den beiden Körpern. Bestimmen Sie desweiteren die Zeit τ die der zweite Körper benötigt um r_{max} zu erreichen. Hinweis: Zur Bestimmung eines der entstehenden Integrale ist die Substitution $r = 2a\sin(\Theta)^2$ hilfreich.

(c) Betrachten Sie nun als Körper den Mond mit Masse $M = 7.35 \cdot 10^{22}$ kg der idealisiert als Kugel einen Radius $R = 1740$ km besitze. Welche radiale Fluchtgeschwindigkeit hat ein Objekt auf der Mondoberfläche?

Aufgabe 4: Wurfreichweiten (freiwillige Bonusaufgabe)

Als Weiterführung von Aufgabe 3 bleiben Sie weiter auf dem Mond. Nehmen Sie an, Sie werfen etwas Mondgestein von der Oberfläche des Mondes in einem Winkel α von der Horizontalen mit der Geschwindigkeit $|\vec{u}|$. Ziel dieser Aufgabe ist die Bestimmung des Auftreffpunktes dieses Steins.

(a) Vereinfachen Sie das Problem in der folgenden Art: Der Startpunkt sei auf einem beliebigen Punkt der Mondoberfläche. Die Bewegung sei auf die x, z Achse beschränkt. Die maximale Höhe sei so klein, dass die Gravitationskraft (1) als konstant angenommen werden kann - vereinen Sie alle dadurch entstehenden Konstanten in (1) zu einem Faktor g. Die Reichweite sei ebenfalls so klein, dass der Wurf auf einer Ebene angenähert werden kann. Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung für die Geschwindigkeitskomponenten des Steins und berechnen Sie x, z Koordinate in Abhängigkeit der Zeit.

(b) Zeigen Sie, dass die Bewegung des Steins eine (deformierte) Parabel beschreibt.

(c) Bestimmen Sie die Flugzeit in Abhängigkeit des Wurfwinkels α, sowie die Wurfreichweite in x.

(d) Für welchen Winkel werfen Sie am weitesten?

Moderne Literatur

Ist $\vec{F}$ immer gleich $m\vec{a}$?

J. H. Gundlach *et al.*, *Laboratory Test of Newton's Second Law for Small Accelerations*, Phys. Rev. Lett. **98**, 150801 (2007).