

Arbeitsblatt 6

14.05.2019

Dynamik und Erhaltungsgrößen

Auf diesem Blatt behandeln wir die Dynamik und Erhaltungsgrößen physikalischer Systeme. Es wird gezeigt, wie letztere genutzt werden können um Bewegungsgleichungen sowohl aufzustellen als auch zu lösen.

Aufgabe 1: Bewegung eines schweren Seiles

(4 Punkte)

Ein Seil der Länge l und Masse m wird auf ein drehbares Rad gelegt (siehe Abb. 1) und befindet sich zu Beginn in Ruhe. Nehmen Sie an, dass das Rad einen Radius R besitzt und seine gesamte Masse M auf dessen Rand gleichmäßig verteilt ist. Gehen Sie außerdem zur Vereinfachung des Problems davon aus, dass die Gleitreibung zwischen dem Rad und dem Seil vernachlässigt werden kann und das Seil nicht über das Rad gleitet, sondern sich nur mit dessen Drehung bewegen kann. Alle wirkende Kräfte in dem System sind konservativ, die Gesamtenergie ist also erhalten.

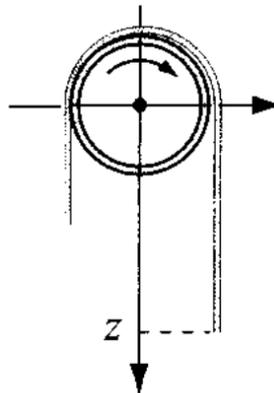


Abbildung 1:

- (a) Geben Sie einen Ausdruck für die kinetische Energie des Seiles sowie der Rotationsenergie des Rades in Abhängigkeit der Geschwindigkeit in z -Richtung an.
Hinweis: Vergleichen Sie das Rad mit der Ihnen aus Vorlesung bekannten Kreisbahn.
- (b) Bestimmen Sie die potenzielle Energie des Systems in Abhängigkeit der Position des rechten Endes des Seils z . Zerlegen Sie hierfür die potenzielle Energie in drei Teile: Den Beitrag des Seiles rechts und links sowie auf dem Rad.
Hinweis: Welche potentielle Energie besitzt ein infinitesimales Stück des Seiles?

Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass das Seil immer auf dem Rad aufliegt. Ignorieren Sie also den letzten Teil der Bewegung, bei dem das rechte Endstück des Seiles komplett über das Rad abrollt.

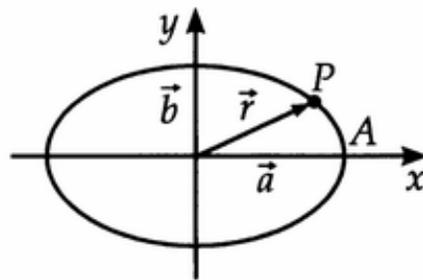
- (c) Nutzen Sie die Erhaltung der Gesamtenergie um eine Differentialgleichung für z zu erhalten.
- (d) Führen Sie die Variable $\xi = z - \frac{l-\pi R}{2}$ ein um das Problem auf eine Ihnen bekannte Differentialgleichung zu überführen und diese zu lösen.
- (e) Geben Sie die Bewegungsgleichung für $z(t)$ an. Gehen Sie als Anfangsbedingung davon aus, dass der rechte Teil des Seils sich auf einer Höhe $z_0 > l/2$ (das Seil also immer nach rechts herunterfällt) und in Ruhe befindet.

Aufgabe 2: Kräfte eines Massenpunktes auf einer Ellipse

(2 Punkte)

Wir betrachten einen Massenpunkt mit konstanter Masse, der sich auf der Ellipse

$\vec{r} = a \cos(\omega t)\vec{e}_x + b \sin(\omega t)\vec{e}_y$ bewegt (s. Skizze).



- (a) Berechnen Sie die Kraft, die auf den Massenpunkt wirkt. Handelt es sich hierbei um eine anziehende oder abstoßende Kraft?
- (b) Zeigen Sie, dass das Kraftfeld konservativ ist.
- (c) Berechnen Sie das Potential eines Punktes P bezüglich des Potentialnullpunkts A .
- (d) Berechnen Sie die kinetische Energie und daraus die Gesamtenergie des Teilchens.

Aufgabe 3: Reibung

(4 Punkte)

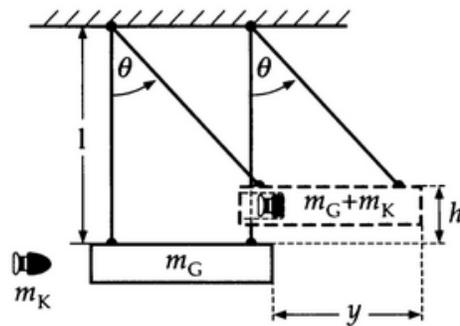
Ein Massenpunkt unterliege der Reibungskraft $\vec{F}_r = -m\gamma\vec{v}$ und der äußeren Kraft $\vec{F}(t) = f(\cos(\omega t)\vec{e}_x + \sin(\omega t)\vec{e}_y)$ mit $t \geq 0$.

- (a) Man berechne daraus $\vec{v}(t)$ und $\vec{r}(t)$ mit $|\vec{v}(0)| = v_0$ und $\vec{v}(0)$ in einer beliebigen Richtung in \mathbb{R}^3 orientiert, sowie $\vec{r}(0) = \vec{0}$.
- (b) Für $\omega \neq 0$ bestimme man die zeitlichen Mittelwerte der absorbierten Leistung $\langle P \rangle = \langle \vec{v} \cdot \vec{F} \rangle$ und des Drehmoments $\langle \vec{D} \rangle = \langle \vec{r} \times \vec{F} \rangle$ im "eingeschwungenen Zustand".

Aufgabe 4: Das ballistische Pendel

(freiwillige Bonusaufgabe)

Die Geschwindigkeit einer Geschwindigkeitsgewehr kugel kann mit Hilfe eines ballistischen Pendels gemessen werden. Dieses besteht aus einem Faden, dessen Gewicht wir vernachlässigen können, und einer Masse m_G , die an dem Faden befestigt ist. Nun wird die Geschwindigkeitsgewehr kugel in den Klotz geschossen und bleibt stecken. Man misst die Bogenlänge, die von der Masse m_G zurückgelegt wird. Folgende Skizze veranschaulicht das ballistische Pendel:



- Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Klotzes und die gesamte kinetische Energie des Systems nach dem Stoß.
- Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der Geschwindigkeitsgewehr kugel v_K , wobei die Größen $m_G = 4 \text{ kg}$, $l = 1,62 \text{ m}$, $m_K = 0,055 \text{ kg}$ und $s = 6,5 \text{ cm}$ vorgegeben sind. Hier beschreibt s die maximale Auslenkung des Klotzes in x -Richtung.

Moderne Literatur

Wie genau ist die Gravitationskonstante bekannt?

C. Speak and T. Quinn, *The search for Newton's constant*, Physics Today **67**, 27 (2014).