TP1: Klassische Mechanik
SS 2019

Universität Stuttgart

Arbeitsblatt 7 21.05.2019

Schwingungen

Auf diesem Blatt behandeln wir die Dynamik einfacher physikalischer Systeme. Hierfür ist es unverzichtbar sich mit der Lösung von Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu befassen, da diese physikalische Systeme beschreiben.

Aufgabe 1: Linearer harmonischer Oszillator **(2 Punkte)**

In dieser Aufgabe diskutieren wir die allgemeine Lösung $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$ des linearen, harmonischen Oszillators $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$.

a) Zu welcher Zeit t_1 erreicht der Oszillator seinen Maximalausschlag $x_{\max}$? Wie groß ist $x_{\max}$? Welchen Wert hat die Beschleunigung zum Zeitpunkt t_1?

b) Zu welcher Zeit erreicht der Oszillator seine Maximalgeschwindigkeit $\dot{x}_{\max}$? Wie groß ist $\dot{x}_{\max}$? Wie groß ist die Auslenkung zur Zeit t_2? Welche einfache Beziehung besteht zwischen $x_{\max}$ und $\dot{x}_{\max}$?

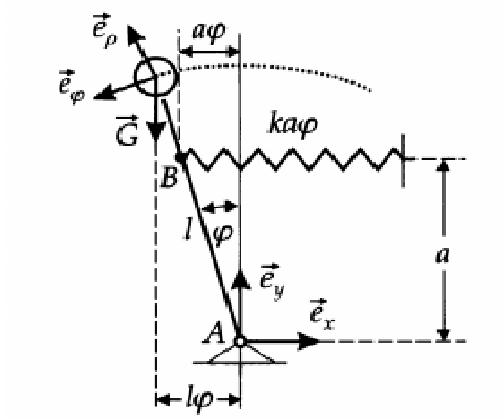
c) Zu welcher Zeit t_3 erfährt der Oszillator die maximale Beschleunigung $\ddot{x}_{\max}$? Wie groß ist diese? Welche Werte haben Auslenkung und Geschwindigkeit zur Zeit t_3?

Aufgabe 2: Schwingung eines drehbar gelagerten Stabes **(4 Punkte)**

Am oberen Ende eines masselos anzunehmenden, im Punkt A drehbar gelagerten und im Punkt B auf einer Feder (Konstante k) abgestützten Stabes AC der Länge l ist ein Gewicht M_G befestigt. (siehe Skizze)

a) Ermitteln Sie die Eigenfrequenz des Systems näherungsweise für Schwingungen mit kleinen Ausschlägen φ.

b) Wie groß darf M_G höchstens werden, damit eine kleine Auslenkung noch eine harmonische Bewegung zur Folge hat?



Aufgabe 3: Schwingungen in Zylinderkoordinaten **(4 Punkte)**

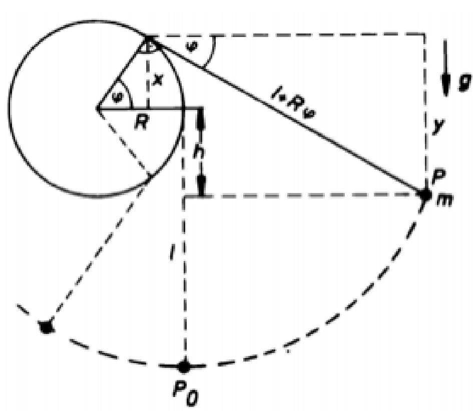
Ein Massenpunkt m hängt an einem undehnbaren, masselosen Faden, der um einen horizontalen Zylinder vom Radius R gewickelt ist. Unter dem Einfluss der Schwerkraft vollführt der Massenpunkt kleine Schwingungen um die Gleichgewichtslage P_0, in der die Länge des freien Fadens 1 ist. Durch die Schwingung ändert sich die Länge des Fadens, siehe Skizze.

(a) Bestimmen Sie die Gleichung zur Berechnung der maximalen Auslenkwinkel φ_m in Abhängigkeit der kinetischen Energie in der Gleichgewichtslage.

(b) Man bestimme nun für kleine kinetische Energien (kleine Anfangsgeschwindigkeit v_0) und damit kleine Auslenkwinkel (Entwicklung der trigonometrischen Funktionen bis 2. Ordnung in φ) die expliziten maximalen Auslenkungen $\varphi_m^\pm$.

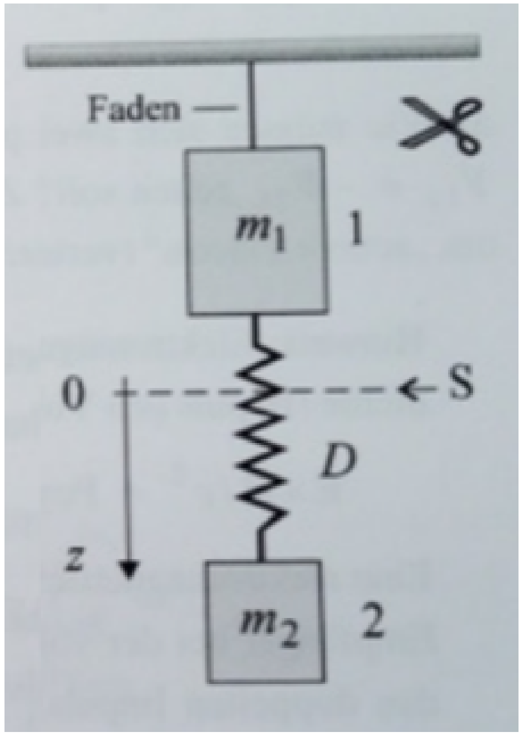
(c) Um ein genaueres Ergebnis zu erhalten, betrachten Sie nun weitere Terme in der Entwicklung von φ bis zur 3. Ordnung. Die so entstehende Gleichung für φ ist allgemein nur schwer zu lösen. Da wir noch immer nur kleine Auslenkungen erwarten, können wir annehmen, dass die neuen maximalen Auslenkungen nur leicht von denen der linearen Ordnung abweichen $\tilde{\varphi}_m \approx \varphi_m^\pm + \delta\varphi$. Finden Sie $\delta\varphi$ unter Betrachtung von Termen bis zur linearen Ordnung in $\delta\varphi$.

(d) Inwiefern unterscheiden sich die obigen beiden Ergebnisse in (a), (b) für die zwei maximalen Auslenkwinkel voneinander?



Aufgabe 4: Freier Fall des Oszillators **(freiwillige Bonusaufgabe)**

Zwei verschiedene Körper mit Masse m_1, m_2 sind durch eine Feder miteinander verbunden und hängen in Ruhe an der Decke. Ohne Belastung sei die Länge der Feder L_0. Die Federkonstante sei D.



(a) Schneiden Sie nun den Faden, der das System an der Decke hält, durch. Wie entwickelt sich die Schwerpunktskoordinate $z_s(t)$ des Systems zeitlich?

(b) Betrachten Sie nun die lokalen Koordinaten der beiden Massen $z_1(t), z_2(t)$ genauer. Geben Sie die auf die Körper wirkenden Kräfte vor und direkt nach dem Schnitt an. Wieso schwingt das System nach dem Schnitt?

(c) Bestimmen Sie die Schwingfrequenz der Massen und ihre Auslenkungsamplituden, sowie die explizite Form von $z_1(t), z_2(t)$.

Moderne Literatur

Synchrone Schwingungen
U. Parlitz, A. Pikovsky, M. Rosenblum und J. Kurths, *Schwingungen im Gleichtakt*, Physik Journal **5**, 33 (2006).