Arbeitsblatt 8

28.05.2019

Mehrteilchensysteme

Auf diesem Blatt behandeln wir Mehrteilchensysteme. Dabei geht es vor allem um die Wechselwirkung zwischen mehreren Massepunkten. Es wird auch hier gezeigt wie Drehimpuls- und Energieerhaltung genutzt werden können um Ssysteme auf lösbare Bewegungsgleichungen zu reduzieren.

Aufgabe 1: Virialsatz (3 Punkte)

Erhaltungsgrößen sind Funktionen in Abhängigkeit des Ortes $\vec{r}$, deren totale zeitliche Ableitung verschwindet. In dieser Aufgabe überlegen wir uns nun, ob wir für nicht erhaltene physikalische Größen eine Aussage über deren zeitlichen Mittelwerte machen können. Dazu verhilft uns der Virialsatz. Der zeitliche Mittelwert einer zeitabhängigen physikalischen Größe $f(t)$ ist definiert durch

$$\langle f \rangle := \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} f(t) dt, \tag{1}$$

wobei t_0 die Anfangszeit ist, zu der das physikalische System präpariert wurde. Zeigen Sie:

a) Der Mittelwert $\langle f \rangle$ hängt nicht von t_0 ab. Betrachten Sie hierzu $\left| \frac{\partial \langle f \rangle}{\partial t_0} \right|$ und schätze $\left| \frac{\partial \langle f \rangle}{\partial t_0} \right|$ durch die Darstellung im Differentialquotienten mit Hilfe der Dreiecksungleichung und der Monotonie des Integrals ab. Gehen Sie außerdem davon aus, dass $f(t)$ für alle Zeiten beschränkt bleibt.

b) Für die zeitlich gemittelte kinetische Energie gilt

$$2 \langle T \rangle = \left\langle \sum_i \nabla V(\vec{r}_i) \cdot \vec{r}_i \right\rangle. \tag{2}$$

Dabei soll angenommen werden, dass die auftretenden Kräfte konservativ und sowohl Orte, als auch Geschwindigkeit beschränkt sind. Anleitung: Gehen Sie bei der Bearbeitung dieser Teilaufgabe von einem Kraftansatz aus, Summieren Sie über alle auftretenden Kräfte und zeigen Sie, dass $\sum_i m_i \vec{r}_i \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_i = \sum_i \vec{r}_i \vec{F}_i$ gilt. Bestimmen Sie nun mit Hilfe der zeitlichen Ableitung

$$\frac{d}{dt}\sum_i m_i\vec{r}_i\frac{d}{dt}\vec{r}_i \tag{3}$$

den zeitlichen Mittelwert. Hinweis: Zeigen Sie, dass $\left\langle \frac{d}{dt}\sum_i m_i\vec{r}_i\frac{d}{dt}\vec{r}_i \right\rangle = 0$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass im Fall eines homogenen Potentials V vom Grad k das Virial die Form

$$2\langle T\rangle = k\langle V\rangle \tag{4}$$

annimmt, indem Sie die Ableitung von (5) für beide Seiten bilden. Bemerkung: Ein Potential V heißt homogen von Grad k, falls gilt

$$V(\lambda\vec{r}_1, ..., \lambda\vec{r}_n) = \lambda^k V(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_n). \tag{5}$$

d) Nun betrachten wir die Anwendung des harmonischen Oszillators und des Gravitationspotentials. Zeigen Sie, dass die beiden Potentiale homogen sind und leiten Sie daraus die Viriale der beiden Systeme ab.

Aufgabe 2: Hantel **(3 Punkte)**

Zwei Massen m_1, m_2 sind durch eine masselose Stange der Länge L miteinander verbunden. Die Hantel, die sich im Schwerefeld der Erde befinde, werde vom Koordinatenursprung in eine beliebige Richtung geworfen.

a) Wie lautet die Bewegungsgleichung für den Schwerpunkt der Massen?

b) Welche Bahn beschreibt der Massenmittelpunkt bei einer Anfangsgeschwindigkeit v_0?

c) Berechnen Sie durch Zerlegung des Gesamtdrehimpulses in den Relativanteil $\vec{L}_r$ und den Schwerpunktsanteil $\vec{L}_s$ den Schwerpunktsanteil $\vec{L}_s$.

d) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für die Relativbewegung auf. Was lässt sich über den Relativdrehimpuls $\vec{L}_r$ sagen?

e) Zeigen Sie, dass die Massen m_1, m_2 Kreisbahnen um den Schwerpunkt mit konstanter Winkelgeschwindigkeit beschreiben. Wie verhalten sich deren Radien?

Aufgabe 3: Teilchenbewegung im Morsepotential **(4 Punkte)**

Betrachten Sie einen Körper der Masse m der sich in einem Potential der Form

$$V(r) = D(e^{-2\alpha r} - 2e^{-\alpha r}) \tag{6}$$

mit $r \in \mathbb{R}$ bewegt. Je nach zur Verfügung stehender Gesamtenergie $E = E_{\text{kin}} + V$ vollführt der Körper verschiedene Arten von Bewegungen. Ziel dieser Aufgabe ist die Bestimmung der Bewegung $r(t)$ des Körpers in diesen verschiedenen Regionen.

(a) Skizzieren Sie die Form des Potentials und begründen Sie wieso im Fall $E < 0$ der Körper gebundene Bewegungen/Schwingungen vollführt. Zeigen Sie, dass für $E_{\text{kin}} \approx 0$ der Körper näherungsweise harmonisch schwingt. Um welchen Punkt oszilliert der Körper im Potential? Welche Frequenz hat er in dieser harmonischen Näherung?

Betrachten Sie nun den allgemeinen Fall $E < 0$.

(b) Bestimmen Sie zunächst die maximal möglichen Auslenkungen des Körpers relativ zur Ruhelage.

(c) Bestimmen Sie die zeitliche Entwicklung des Körpers $r(t)$. Tipp: Ein möglicher Lösungsweg kann mit $dr/dt = p/m$, sowie der Energieerhaltung $E = p^2/(2m) + V(r)$ erhalten werden.

(d) Welche Oszillationsfrequenz besitzt die allgemeine Schwingung aus (c)? Wie unterscheidet sich diese von der harmonischen Schwingung? Zeigen Sie, dass die allgemeine Schwingungsfrequenz im harmonischen Limit dem Resultat aus (a) entspricht. Zeigen Sie weiter, dass ihr Ergebnis von $r(t)$ aus (c) ebenfalls in dieser Näherung eine harmonische Oszillation beschreibt.

Betrachten Sie nun die Fälle $E = 0$ und $E > 0$.

(e) Berechnen Sie die Lösung für $r(t)$ für $E = 0$. Beschreibt diese eine gebundene oder ungebundene Bewegung?

(f) Berechnen Sie die Lösung für $r(t)$ für $E > 0$. Bestimmen Sie für große Zeiten wie sich $r(t)$ zeitlich ändert, ist das Verhalten linear, quadratisch, etc, logarithmisch oder exponentiell? Wie unterscheidet sich das Verhalten zum $E = 0$ Fall?

Hilfreiche unbestimmte Integrale:

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{az^2 + 2bz - b}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|a|}} \arcsin\left(\frac{az+b}{\sqrt{b(b-|a|)}}\right) + const & \text{für } a < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{a}} \text{arccosh}\left(\frac{az+b}{\sqrt{b(b+a)}}\right) + const & \text{für } a > 0 \end{cases} \tag{7}$$

Aufgabe 4: Lenzvektor **(freiwillige Bonusaufgabe)**

Der Vektor $\vec{A} = \vec{v} \times \vec{L} + V(\vec{r})\vec{r}$ werde als verallgemeinerter, zum Zentralpotential gehöriger Lenzvektor bezeichnet.

a) Man zeige, dass für ein Potential $V(\vec{r}) = \dfrac{\lambda}{|\vec{r}|}$ der Lenzvektor eine Erhaltungsgröße ist.

b) Man berechne für $V(\vec{r}) = \dfrac{\lambda}{|\vec{r}|}$ das Skalarprodukt $\vec{A} \cdot \vec{A}$ und drücke das Ergebnis durch λ, E und L aus.

c) Mit Hilfe des Lenzvektors stelle man die Bahngleichung des Keplerproblems in der Form $r = \dfrac{p}{1 + \varepsilon \cos(\varphi)}$ auf und drücke die Parameter p und ε durch die reduzierte Masse m^*, sowie λ, E und L aus. Welche anschauliche Bedeutung hat $\vec{A}$?

Moderne Literatur

Ein Test der Gravitationskraft auf kleine Skalen:
D. J. Kapner *et al.*, *Tests of the gravitational inverse-square law below the dark-energy length scale*, Physical Review Letters **98**, 021101 (2007).