Arbeitsblatt 10

18.06.2019

Lagrange Formalismus

Auf diesem Blatt lernen wir den den Lagrange Formalismus anhand verschiedener Beispiele kennen. Dieser ermöglicht es uns die Bewegungsgleichungen von auch komplizierteren Systemen durch geschickte Wahl von verallgemeinerten Koordinaten aufzustellen und zu lösen.

Aufgabe 1: Teilchen auf gleitender schiefer Ebene (4 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m rollt eine schiefe Ebene mit Steigungswinkel α und Höhe h hinab. Die schiefe Ebene ist ein Keil mit Masse M, der sich frei in horizontaler Richtung bewegen kann (vgl. Abb. 2). Ignorieren Sie hierbei Reibungseffekte.

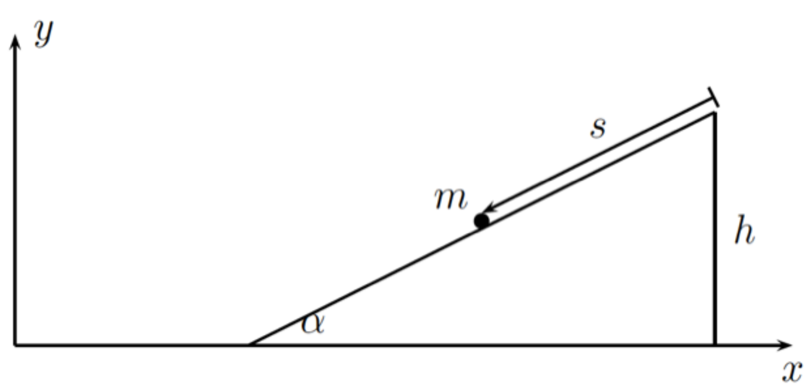

Abbildung 1: Aufgabe 1

(a) Bestimmen Sie die Lagrangefunktion L in Abhängigkeit der zurückgelegten Distanz des Masseteilchens s und der zurückgelegten Streckte der rechten Kante des Keils x.

(b) Leiten Sie hierraus die entsprechenden Euler-Lagrange-Gleichungen her und lösen Sie diese unter der Annahme, dass sich das Masseteilchen und der Keil zu Beginn in Ruhe befinden. Welchen Effekt hat das Masseteilchen auf den Keil? Wie verhält sich das System im Grenzfall $M \to \infty$? Welchem Ihnen bekannten Problem entspricht dies?

Aufgabe 2: Horizontal bewegliches Pendel (3 Punkte)

Ein Wagen der Masse m_1 sei auf einer horizontalen Schiene in x-Richtung reibungsfrei beweglich. An dem Wagen hängt ein mathematisches Pendel der Länge l mit einer Masse m_2.

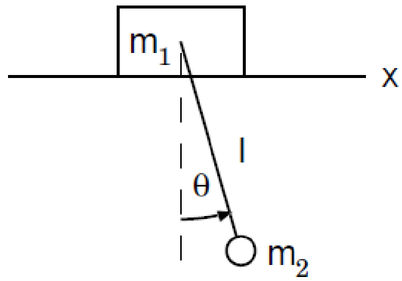

Abbildung 2: Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie die Langrangefunktion.

b) Welche Erhaltungssätze gelten?

c) Geben Sie die Gesamtenergie an. Eliminieren Sie mit Hilfe von Erhaltungssätzen $\dot{x}$.

d) Geben Sie die Energie im Grenzfall kleiner Winkel θ an, indem Sie $\cos(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2}$ und $\cos^2(\theta) = 1$ setzen.

e) Aufgabenteil d) liefert die Energie in der Form eines harmonischen Oszillators. Geben Sie die Schwingungsfrequenz an. In welcher Weise hängt diese vom Geamtimpuls in x-Richtung ab?

Aufgabe 3: Aufrollende Kugel **(3 Punkte)**

Ein Zylinder mit Radius R stehe aufrecht auf einem Tisch. Eine Kugel der Masse m und vernachlässigbarem Radius befinde sich ebenfalls auf dem Tisch und sei mit einem Faden der Länge l straff mit dem Zylinder an einem Punkt verbunden. Zu Anfang befinde sich die Kugel im maximal möglichen Abstand zum Zylinder. Die Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0$ sei senkrecht zur Fadenrichtung und deren Betrag konstant. Ziel dieser Aufgabe ist die Bestimmung der nötigen Zeit bis dass die Kugel den Zylinder berührt.

(a) Wählen Sie geeignete Koordinatensysteme und bestimmen Sie mithilfe der Lagrangefunktion die nötige Zeit bis zum auftreffen der Kugel. Tipp: Während des Aufwickelns ist der freie Teil des Fadens stets tangential zum Zylinder am letzten Kontaktpunkt. Teilen Sie zudem dort den Polarwinkel $\varphi = \alpha + \beta$ auf in den Winkel mit dem der Faden aufgewickelt ist α und der freie Anteil β. Eliminieren Sie so $\varphi(r)$.

(b) Welcher Teil der Bewegung trägt dominant zur nötigen Zeit bei, wenn $l \to \infty$. Welcher bei sehr kleinen/großen Zylinderradien R?

Aufgabe 4: Hamiltonfunktion und Erhaltungssätze **(freiwillige Bonusaufgabe)**

Gegeben sei $L = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - V(|r|)$.

a) Berechnen Sie L in Kugelkoordinaten (r,ϑ,φ):

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi, \quad \text{und} \quad z = r\cos\vartheta \quad .$$

Was erhalten Sie für die kinetische Energie?

b) Berechnen Sie die verallgemeinerten Impulse.

c) Berechnen Sie die Hamiltonfunktion des Systems.

d) Finden Sie die Erhaltungssätze des Systems.

e) Aufgrund der Erhaltungssätze verläuft die Bewegung ganz in einer Ebene. Betrachten Sie den Fall $\vartheta = \pi/2$ und führen Sie das verbleibende Radialproblem auf ein Integral zurück.

Moderne Literatur

Eine Erweiterung des Hamilton-Prinzips für nicht konservative Systeme:
C. R. Galley, *Classical Mechanics of Nonconservative Systems*, Physical Review Letters **110**, 174301 (2013).