Arbeitsblatt 11 — 25.06.2019

Hamilton-Mechanik

Auf diesem Blatt behandeln wir Hamiltonmechanik. Im Gegensatz zur Lagrangemechanik beschreibt sie den Phasenraum eines Teilchens. Der Vorteil dieser Methode liegt darin, dass sie eine große Gruppe von Transformationen zulassen, die die Lösung der Gleichungen invariant lässt. Durch solche Transformationen werden die Bewegungsgleichungen vereinfacht.

Aufgabe 1: Legendretransformationem (3 Punkte)

Sei $f(x)$ eine glatte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f''(x) > 0$. Die Funktion f ist also strikt konvex. Die Legendre-Transformation ist nun definiert durch $(Lf)(y) = y\varepsilon(y) - f(\varepsilon(y))$, wobei $\varepsilon(y) = (f')^{-1}(y)$ gilt, d.h. es ist $y = f'(\varepsilon(y))$.

(a) Berechnen Sie die Legendre-Transformierte für die Funktionen

$$f_1(x) = e^{x-1}, \quad f_2(x) = -\frac{1}{2}(x-a)^2 + \frac{a^2}{4}.$$

(b) Zeigen Sie, dass für eine strikt konvexe Funktion die Legendretransformierte die Eigenschaft $(Lf)''(y) > 0$ hat, wobei wir hier die beiden Ableitungen bezüglich y betrachten.

(c) Zeigen Sie, dass für eine strikt konvexe Funktion die Legendretransformation zu sich selbst invers ist, d.h. $L(L(f(x))) = f(x)$ gilt.

Aufgabe 2: Hamiltonfunktion in Zylinderkoordinaten **(4 Punkte)**

Die potentielle Energie eines Teilchens der Masse m sei in Zylinderkoordinaten (r, φ, z) gegeben durch

$$V(r) = V_0 \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \text{ mit } V_0 = const\ , r_0 = const.$$

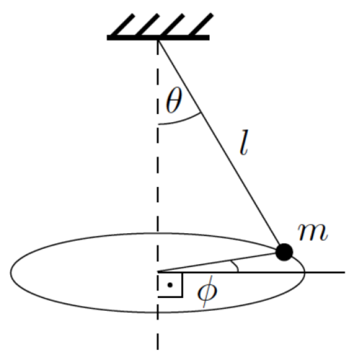
(a) Wie lautet die Hamiltonfunktion?

(b) Stellen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen auf.

(c) Finden Sie drei Erhaltungssätze.

(d) Leiten Sie aus den vorherigen Teilaufgaben die gekoppelten Bewegungsgleichungen der kanonischen Koordinaten (r, φ, z) her.

Aufgabe 3: Dreidimensionales Pendel **(3 Punkte)**

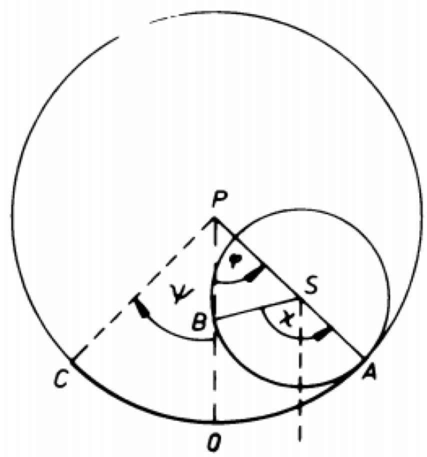


Betrachten Sie ein dreidimensionales Pendel.

(a) Bestimmen Sie die Hamiltonfunktion des Problems.

(b) Welche Invarianten der Bewegung gibt es? Lässt sich die Dynamik einfacher beschreiben?

(c) Bestimmen Sie in linearer Näherung $\Phi(t)$, sowie $\theta(t)$ für die Fälle (i) Kleine Auslenkung aus der Ruhelage und kein Impuls in ϕ-Richtung: $p_\Phi = 0$ sowie $\theta \to 0$ (ii) Große Auslenkung in θ bei schneller Rotation und daher großem Impuls in ϕ-Richtung : $p_\Phi \gg 1$, $\theta \to \pi/2$.



Aufgabe 4: Zylinder im Zylinder **(freiwillige Bonusaufgabe)**

Ein homogener Hohlzylinder vernachlässigbarer Dicke mit Masse M und Radius R ist im homogenen Schwerefeld $g = -ge_z$ drehbar um eine horizontale Achse durch den Mittelpunkt P gelagert. In diesem Hohlzylinder rollt ein homogener Kreiszylinder mit Masse m und Radius r ohne Schlupf. Die beiden Zylinderachsen sind parallel zueinander (s. Skizze). Man bestimme

(a) Die Hamiltonfunktion

(b) Die kanonischen Bewegungsgleichungen

(c) Die Eigenfrequenzen im Falle kleiner Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage.

Moderne Literatur

Eine Geschichte des Phasenraums:

D.D. Nolte, *The tangled tale of phase space*, Physics Today **63**(4), 33 (2010).