

Arbeitsblatt 12

02.07.2019

Hamilton-Mechanik 2

Auf diesem Blatt soll die Hamilton-Mechanik weiter behandelt und vertieft werden, da sie für die weiteren theoretischen Bereiche der Physik hohen Anwendungsgrad hat. Dazu gehört vor allem die Quantenmechanik und die statistische Physik.

Aufgabe 1: Schraubenlinie

(3 Punkte)

Auf einer Schraubenlinie, die durch die Parametrisierung

$$\begin{pmatrix} x_1(\varphi) = R \cos(\varphi) \\ x_2(\varphi) = R \sin(\varphi) \\ x_3(\varphi) = a\varphi \end{pmatrix}$$

gegeben ist, gleite unter dem Einfluss der Schwerkraft ein Massepunkt der Masse m . Gesucht sind nun die Hamiltongleichungen für die Bewegung des Massepunktes. Berechnen sie zudem die zeitliche Änderung der x_3 -Komponente des Drehimpulses des Massepunktes bezüglich des Koordinatenursprungs.

Aufgabe 2: Masse im Kegel

(4 Punkte)

Seien nun zwei Teilchen der Massen m_1 und m_2 gegeben. Diese seien nun beide mit einem Seil der Länge l verbunden. Dieses Seil sei durch ein Loch in der Spitze eines Kegels mit Öffnungswinkel α gefädelt. Dabei hängt die Masse m_1 frei im Inneren und die Masse m_2 außerhalb des Kegels (s. Skizze). Vernachlässigen Sie dabei die Reibung.

- Geben Sie für dieses Problem die generalisierten Koordinaten an.
- Stellen Sie die Lagrangefunktion auf und leiten Sie daraus die Bewegungsgleichung ab für jede generalisierte Koordinate.
- Bestimmen Sie die Hamiltonfunktion des Systems.
- Drücken Sie die Kreisfrequenz für die Masse m_2 , die sich auf einer Kreisbahn bewege, durch feste Größen aus.

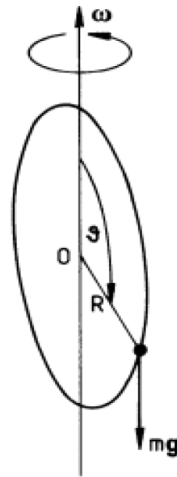


Abbildung 1: Aufgabe 4

Aufgabe 3: Symmetrie und Erhaltungssätze

(3 Punkte)

Betrachten Sie die Lagrangefunktion für 3 Teilchen, die über ein Toda Potential wechselwirken

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) - e^{q_1 - q_2} - e^{q_2 - q_3} - e^{q_3 - q_1}$$

- Bestimmen Sie die zugehörige Hamiltonfunktion.
- Zeigen Sie, dass die Größe $p_1 + p_2 + p_3$ erhalten ist.
- Zeigen Sie, dass die Größe $p_1 p_2 p_3 - p_1 e^{q_2 - q_3} - p_2 e^{q_3 - q_1} - p_3 e^{q_1 - q_2}$ ebenfalls erhalten ist.
- Finden Sie eine dritte unabhängige Erhaltungsgröße.

Aufgabe 4: Perle auf rotierendem Draht

(freiwillige Bonusaufgabe)

Ein zu einem Kreis mit dem Radius R gebogener Draht rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um einen Durchmesser, der parallel zum homogenen Schwerfeld ist (s. Skizze). Auf dem Draht gleite reibungsfrei eine Perle mit der Masse m . Berechnen Sie für dieses System die Hamiltonfunktion und die Hamiltongleichungen.

Moderne Literatur

Eine interessante Anwendung der Hamilton-Mechanik in der Biologie:

T. C. T. Michaels *et al.*, *Hamiltonian Dynamics of Protein Filament Formation*, Physical Review Letters **116**, 038101 (2016).