TP1: Klassische Mechanik
SS 2019

Universität Stuttgart

Arbeitsblatt 13 09.07.2019

Hamilton-Jacobi-Mechanik und kanonische Transformationen

Auf diesem Blatt behandeln wir Transformationen, die die Hamiltonmechanik invariant lassen. Diese werden kanonische Transformationen genannt. Auch werden wir uns mit dem Hamilton-Jakobi-Formalismus auseinandersetzen, bei dem eine Hamiltonfunktion durch Transformation so erzeugt wird, dass sie konstant ist.

Aufgabe 1: Kanonische Transformationen **(3 Punkte)**

Beweisen Sie, dass folgende Transformationen kanonisch sind:

(a)

$$P = \frac{1}{2}\left(p^2 + q^2\right),\ Q = \arctan\left(\frac{q}{p}\right) \tag{1}$$

(b)

$$\begin{aligned}
p_1 &= \sqrt{k_1 P_1}\sin(Q_1) + \sqrt{k_2 P_2}\sin(Q_2)\\
p_2 &= \sqrt{k_1 P_1}\sin(Q_1) - \sqrt{k_2 P_2}\sin(Q_2)\\
q_1 &= \sqrt{\frac{P_1}{k_1}}\cos(Q_1) - \sqrt{\frac{P_2}{k_2}}\cos(Q_2)\\
q_2 &= \sqrt{\frac{P_1}{k_1}}\cos(Q_1) + \sqrt{\frac{P_2}{k_2}}\cos(Q_2)
\end{aligned}$$

Aufgabe 2: Konstrunktion von Transformationsgleichungen **(4 Punkte)**

Ein Teilchen der Masse $m = 1/2$ bewege sich eindimensional in einem Potential $H(q, p_q) = p_q^2 + e^q$. Ebenfalls soll nur der Bereich betrachten werden, in dem der Impuls $p_q > 0$ sei. Zur Lösung der Dynamik werde eine kanonische Transformation angewandt, die den Hamiltonian auf die Form $H(Q, p_Q) = p_Q^2/4$ überführt. Die Dynamik des neuen Hamiltonians ist einfach, jedoch sind für die Bestimmung der Dynamik des Teilchens die kanonischen Transformationen vonnöten. Sind die Erzeugenden bekannt, ist deren Bestimmung ein leichtes Unterfangen. Die Bestimmung der Erzeugenden selbst jedoch ist im Allgemeinen nicht trivial, sofern die Transformationen nicht bereits bekannt sind. In dieser Aufgabe versuchen Sie die Erzeugenden, sowie die Transformationen zu bestimmen, um daraus die Dynamik des Teilchens zu berechnen.

(a) Berechnen Sie die Dynamik in den neuen Koordinaten. Welche Erhaltungsgröße gibt es?

(b) Berechnen Sie die Erzeugende $F(q, p_Q)$ unter Zuhilfenahme der Gleichheit des Hamiltonians vor und nach der Transformation. Nutzen Sie die unteren Identitäten und vereinfachen Sie ihr Ergebnis weitmöglichst. Aus der Transformation des Hamiltonians erhalten Sie nur eine Gleichung für die Phasenraumkoordinaten, daher ist das Problem unterbestimmt. Nehmen Sie daher an, dass die von q unabhängige Integrationskonstante, die Sie zur Bestimmung von $F(q, p_Q)$ erhalten, verschwindet $g(p_Q) = 0$.

(c) Bestimmen Sie aus der Erzeugenden die Transformationen $Q(q, p_q), p_Q(q, p_q)$, sowie $q(Q, p_Q)$, $p_q(Q, p_Q)$. Testen Sie, ob durch die obige Annahme der Hamiltonian korrekt transformiert wird. (Zwischenergebnis: $p_q = p_Q\ |\tanh(Q)|/2,\ q = 2\ln(p_Q/(2\cosh(Q)))$)

(d) Berechnen Sie alle weiteren Erzeugenden in ihren jeweiligen Koordinaten.

(e) Bestimmen Sie die Dynamik des Teilchens in den ursprünglichen Koordinaten

Hilfreiche Identitäten:

$$\int \frac{2\sqrt{a^2 - x^2}}{x} dx = 2\sqrt{a^2 - x^2} - 2a\ \ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right) + const$$

mit $a \neq a(x)$. Für $x > 1$ gilt:

$$\text{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

Aufgabe 3: Hamilton-Jakobi-Differentialgleichung **(3 Punkte)**

Stellen Sie die Hamilton-Jakobi-Differentialgleichung für die eindimensionale Bewegung eines Teilchens der Masse m im Potential $V(x) = -bx$ auf und lösen Sie das Bewegungsproblem mit den Anfangsbedingungen $x(t = 0) = x_0$, $\dot{x}(t = 0) = v_0$.

Aufgabe 4: Gekoppelte Hamiltonfunktion **(freiwillige Bonusaufgabe)**

Wir nehmen nun an, dass ein System mit einer zeitunabhängigen Hamiltonfunktion $H_0(p, q)$ an ein äußeres oszillierendes Feld gekoppelt ist. Daher nimmt die Hamiltonfunktion die Form $H = H_0(p, q) - \varepsilon q \sin(\omega t)$ an, wobei ε und ω Konstanten sind.

a) Was bedeutet der Ausdruck $\varepsilon q \sin(\omega t)$ physikalisch?

b) Wie ändern sich die kanonischen Bewegungsgleichungen?

c) Finden Sie eine kanonische Transformation, die die kanonische Form

der Bewegungsgleichung wieder herstellt. Welche Gestalt hat die neue Hamiltonfunktion?

Moderne Literatur

Eine einfache Herleitung vom Satz von Bertrand:

S. A. Chin, *A truly elementary proof of Bertrand's theorem*, American Journal of Physics **83**, 320 (2015).