Arbeitsblatt 14

16.07.2019

Nichtlineare Dynamik

Allgemeine nichtlineare Dynamiken sind schwer zu lösen. In diesem Blatt beschäftigen wir uns mit der Hamilton-Jacobi Gleichung, genauer gesagt, Wirkungsvariablen, und wie diese für separable Systeme genutzt werden kann. Außerdem betrachten wir wie mithilfe der Störungsrechnung eine approximative Lösung gefunden werden kann, sofern die Dynamik nicht chaotisch ist.

Aufgabe 1: Theorem von Liouville und der zweidimensionale harmonische Oszillator (3 Punkte)

Gegeben sei ein zweidimensionaler harmonischer Oszillator mit der Hamiltonfunktion

$$H = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2 + \omega_1^2 q_1^2 + \omega_2^2 q_2^2\right) \tag{1}$$

Im Fall einer separablen Hamiltonfunktion mit periodischer Bewegungen kann diese mittels Wirkungsvariablen $I_i = \oint p_i dq_i$ auf eine einfachere Form gebracht werden,

$$H = H(I_1, I_2, ...I_N) \tag{2}$$

aus der direkt die auftretenden Frequenzen der periodischen Bewegung ersichtlich sind, ohne, dass die Bewegungsgleichung des Problems explizit gelöst werden muss.

Das Kurvenintegral bei I_i läuft dabei über einer komplette Periode der geschlossenen Bahn (Libration) im Phasenraum. Ziel dieser Aufgabe ist es die Wirkungsvariablen für den Fall des zweidimensionalen harmonischen Oszillators zu bestimmen.

(a) Als erstes betrachten wir ganz allgemein die Separabilität einer zeitunabhängigen Hamiltonfunktion der Form

$$H = \frac{f_1(q_1,p_1) + ... + f_N(q_N,p_N)}{g_1(q_1,p_1) + ... + g_N(q_N,p_N)} \tag{3}$$

Wir versuchen also zu sehen unter welchen Bedingungen sich die Hamilton-Jacobi Gleichung in N unabhängige Gleichungen aufteilen lässt.

(i) Bestimmen Sie die Hamilton-Jacobi Gleichung in diesem Fall. Führen Sie N Integrationskonstanten β_i ein für die gilt $\sum_i^N \beta_i = 0$.

(ii) Zeigen Sie hiermit, dass sich die Hamilton-Jacobi Gleichung für die Ableitung der Wirkung $\frac{\partial S_i}{\partial q_i}$ (und damit auch die Wirkungsvariablen I_i im periodischen Fall) einer Hamiltonfunktion, wie in Gl. (3) genau dann in N unabhängige Gleichungen zerlegen lassen, wenn gilt

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial p_i}\right) - E\left(\frac{\partial g_i}{\partial p_i}\right) \neq 0, \quad \forall i \tag{4}$$

Benutzen Sie hierzu den Satz der impliziten Funktion um zu zeigen, dass p_i als Funktion von q_i geschrieben werden kann. Folgern Sie hieraus, dass S separat per Integration erhalten werden kann.

$$S = -Et + \sum_i \int \frac{\partial S_i}{\partial q_i} dq_i \tag{5}$$

Betrachten Sie nun den konkreten Fall des zweidimensionalen harmonischen Oszillators.

(b) Geben Sie f_1, f_2 und g_1, g_2 für den Fall des 2D harmonischen Oszillators an und zeigen Sie, dass Bedingung (4) erfüllt ist.

(c) Wählen Sie die Gesamtenergie der jeweiligen Moden $\alpha_i = E_i = \frac{1}{2}\left(p_i^2 + \omega_i^2 q_i^2\right)$ als die neuen zyklischen Impulse α_i und drücken den kanonischen Impuls p_i in Abhängigkeit von q_i und α_i aus. Bestimmen Sie hierraus die Umkehrpunkte $q_i^{\pm}$ der Bewegung im Phasenraum in der p_1, q_1- und p_2, q_2-Ebene.

(d) Teilen Sie das Kurvenintegral der beiden Wirkungsvariablen in zwei Teile, den Hinweg q_i^+ nach q_i^- und auf dem Rückweg in Gegenrichtung, auf. Was muss im Falle des harmonischen Oszillators für den kanonischen Impuls p_i auf dem Hin-bzw. Rückweg gelten? Nutzen Sie dies um die beiden Wirkungsvariablen I_1 und I_2 zu bestimmen.

(e) Geben Sie die explizite Form von H in den zyklischen Koordinaten an. Ermitteln Sie außerdem die auftretenden Frequenzen via $\nu_i = \frac{\partial H}{\partial I_i}$.

Aufgabe 2: Freies Teilchen im 2D Kasten und einem 3D harmonischen Potential (3 Punkte)

In dieser Aufgabe betrachten wir weitere Beispiele für die Anwendung von Wirkungsvariablen.

(a) Als erstes betrachten wir ein freies Teilchen in einem 2D Kasten der Länge a und Breite b und der Hamiltonfunktion

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2\right) \qquad\qquad 0 < x < a,\ 0 < y < b. \tag{6}$$

Welche Größen sind hier Konstanten der Bewegung? Nutzen Sie dies um zwei Wirkungsvariablen und anschließend die zugehörigen Frequenzen zu bestimmen. Wie unterscheiden sich die Frequenzen von denen in Aufgabe 1 und was bedeutet dies für das System?

(b) Gegeben sei ein Teilchen in einem 3D harmonischen Potential der Form

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{K^2}{r^2}\right) + kr^2 = E \tag{7}$$

Hierbei ist k eine Konstante des Potentials und K der Drehimpuls des Teilchens. Bestimmen Sie die beiden Wendepunkte des Bahnorbits r_{min} und r_{max} unter der Annahme, dass der Drehimpuls nicht zu groß ist $4kK^2 < mE^2$. Berechnen Sie hierraus die Wirkungsvariable in r, I_r.

Hinweiß: Die Formel $\frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{\sqrt{(b-r)(r-a)}}{r} = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$ könnte hilfreich sein.

Aufgabe 3:Der gestörte Oszillator **(4 Punkte)**

Betrachtet werde ein Hamiltonian der Form

$$H(q,p) = H_0(q,p) + \varepsilon H_1(q,p) \tag{8}$$

mit

$$H_0 = (p^2 + \omega_0^2 q^2)/2, \; H_1 = q^3. \tag{9}$$

Die Bewegung ist also eine harmonische Oszillation die schwach ($\varepsilon \ll 1$) gestört wird. Das ungestörte Problem kann leicht gelöst werden via Wirkungsvariablen (I_0, Θ_0), die den Hamiltonian auf die Form

$$K_0(I_0) = I_0\omega_0 \tag{10}$$

bringt. Die Koordinate $q = \sqrt{2I_0/\omega_0}\sin(\Theta_0)$ kann in Abhängigkeit der neuen Variablen geschrieben werden. Ziel dieser Aufgabe ist die Bestimmung der Schwingungsfrequenz, bei kleinen Störungen, mittels Störungsrechnung.

Für kleine Parameter ε ist die transformierte Hamiltonfunktion mit der Störung $K(\Theta_0, I_0, \varepsilon)$ sehr ähnlich zu $K_0(I_0)$. Daher muss ebenfalls für die kanonischen Transformationen von (Θ_0, I_0) nach (Θ, I) gelten, dass sich diese nur schwach von der Identität unterscheiden wird, sie können also entwickelt werden um die ungestörten Variablen. Dadurch müssen die Erzeugenden in Ordnungen von ε geschrieben werden können, $F(\Theta_0, I, \varepsilon) = F_0(\Theta_0, I) + \varepsilon F_1(\Theta_0, I) + \varepsilon^2 F_2(\Theta_0, I) + ...$, wobei für $F_0(\Theta_0, I) = \Theta_0 I$ gilt.

(a) Berechnen Sie aus der Erzeugenden die allgemeine Form der Koordinaten $I_0(\Theta_0, I), \; \Theta(\Theta_0, I)$ bis zur 2. Ordnung in ε. Geben Sie dann die Taylor Reihe von $K(I_0, \Theta_0, \varepsilon)$ um $I_0 = I$ bis zur 2. Ordnung an. Vereinfachen Sie diesen Ausdruck unter Zuhilfenahme von $I_0(\Theta_0, I)$, sowie der allgemeinen Form bis 2. Ordnung $K(\Theta_0, I_0) = K_0(\Theta_0, I_0) + \varepsilon K_1(\Theta_0, I_0) + \varepsilon^2 K_2(\Theta_0, I_0)$. In den neuen (Wirkungswinkel)-Koordinaten erwarten wir, dass der Hamiltonian geschrieben werden kann als $K(\Theta_0, I_0, \varepsilon) = E(I, \varepsilon) = E_0(I) + \varepsilon E_1(I) + \varepsilon^2 E_2(I)$. Identifizieren Sie die verschiedenen Ordnungen von E mit den Ordnungen des entwickelten K's.

Um die Störungsrechnung berechnen zu können, müssen die unbekannten Ableitungen der Erzeugendenterme $F_i(\Theta_0, I)$ bestimmt werden. Dafür nutzen wir die Symmetrieeigenschaften der Erzeugenden aus.

(b) Betrachten Sie die Differenz $F^*(\Theta_0, I, \varepsilon) = F(\Theta_0, I, \varepsilon) - \Theta_0 I$. Aus der Definition einer Wirkungsvariable geht hervor (siehe Vorlesung), dass das geschlossene Wegintegral über die Erzeugende die Form $2\pi I = \oint \frac{\partial F}{\partial \Theta_0} d\Theta_0$ hat. Argumentieren Sie damit, wieso $F^*(\Theta_0, I, \varepsilon)$ und damit jede Ordnung F_i periodisch in Θ_0 ist, mit Periode 2π. Nehmen Sie dafür an, dass für den Wirkungswinkel $\Theta \approx \Theta_0$ gilt. Da F_i periodische Funktionen in Θ_0 sind, können sie als Fourier Reihen geschrieben werden $F_i(I, \Theta_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k^i(I)\exp(ik\Theta_0), k \neq 0$. Was gilt dadurch für die Mittelungsintegrale $\langle F_i(\Theta_0, I)\rangle, \; \langle \partial F_i(\Theta_0, I)/\partial\Theta_0\rangle$, wobei die Mittelung definiert ist als $\langle f(\Theta_0)\rangle = 1/(2\pi)\int_0^{2\pi} f(\Theta_0) d\Theta_0$?

(c) Mitteln Sie die Gleichungen aus (a) für die verschiedenen Ordnungen von E_i. Schreiben Sie die erhaltenen Gleichungen für $E_1, \; E_2$ in Abhängigkeit bekannter Grössen, indem Sie die F_i Terme geschickt unter Verwendung der gemittelten sowie ungemittelten Gleichungen eliminieren.

Die so erhaltene Störungsrechnung des Hamiltonians bis zur 2. Ordnung, in den neuen Wirkungswinkelvariablen (I, Θ), hat die Form

$$\begin{aligned} E(I) &= K_0|_{I_0=I} + \varepsilon\langle K_1\rangle|_{I_0=I} \\ &\quad + \varepsilon^2 \left[\langle K_2\rangle + \frac{1}{\partial K_1/\partial I_0}\left(\left\langle \frac{\partial K_1}{\partial I_0}\right\rangle \langle K_1\rangle - \left\langle \frac{\partial K_1}{\partial I_0} K_1\right\rangle\right) + \frac{1}{2(\partial K_1/\partial I_0)^2}\frac{\partial^2 K_1}{\partial I_0^2}(\langle K_1^2\rangle - \langle K_1\rangle^2)\right]\Bigg|_{I_0=I}, \end{aligned} \tag{11}$$

wobei die K_i Terme bei $I_0 = I$ ausgewertet werden.

(d) Berechnen Sie die Modifikation der Schwingungsfrequenz durch die Störung. Welche Ordnung der Störungsrechnung trägt zur Frequenzänderung bei?

Moderne Literatur

Wie stabil ist unser Sonnensystem?
J. Laskar, *A numerical experiment on the chaotic behaviour of the Solar System,* Natur **338**, 237 (1989).

Hamilton-Jacobi-Gleichung und Schrödinger-Gleichung:
Schleich, W.P.; Greenberger, D.M.; Kobe, D.H. und Scully, M.O. *Schrödinger equation revisited*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **110**, 5374 (2013)