TP2: Quantenmechanik
WS 19/20

Universität Stuttgart

Arbeitsblatt 02 29.10.2019

Analytische Mechanik

Die Quantenmechanik ist fundamental anders als die klassische Mechanik und doch, auf eine Weise, sehr ähnlich. In diesem Übungsblatt behandeln wir drei Aufgaben aus der analytischen Mechanik, die später auch in der Quantenmechanik erscheinen werden. Analogien und Unterschiede zwischen den zwei Theorien sollen so klarer werden.

Aufgabe 1: Wahrscheinlichkeitsverteilung eines harmonischen Oszillators (11 Punkte)

Gegeben sei die Hamiltonfunktion eines harmonischen Oszillators mit Masse m und Frequenz ω

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \tag{1}$$

(a) Bestimmen Sie $q(t)$ und $p(t)$ als Funktion der Gesamtenergie mit den Anfangsbedingungen $q(t_0) = q_0$, $p(t_0) = 0$.

(b) Das System benötigt für eine halbe Periode zwischen zwei Umkehrpunkten die Zeit $\frac{\tau}{2} = \frac{\pi}{\omega}$. Zeigen Sie hiermit, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte $P(q)$ um das Teilchen während einer halben Periode in einem kleinen Gebiet $(q, q+dq)$ mit Wahrscheinlichkeit $P(q)dq$ zu finden gegeben ist, als

$$P(q) = \frac{2}{\tau\dot{q}}$$

Wobei hier $\dot{q} = dq/dt$ die Geschwindigkeit des Teilchens beschreibt.

(c) Geben Sie die Geschwindigkeit $\dot{q}$ als Funktion von E und q an und nutzen Sie dieses Ergebnis um einen neuen Ausdruck für $P(q)$ zu erhalten. Vergewissern Sie sich, dass $P(q)$ normalisiert ist. In welchem Wertebereich kann q nur liegen? *Hinweis:* $\int du \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = \sin^{-1}(u)$

(d) Gehen Sie nach dem gleichen Prinzip vor um die Verteilung für den kanonischen Impuls $P(p)$ zu bestimmen.

(e) Nutzen Sie die erhaltenen Verteilungen um die Erwartungswerte $\langle q\rangle$, $\langle p\rangle$, $\langle q^2\rangle$ und $\langle p^2\rangle$ zu bestimmen. Bestimmen Sie anschließend das Produkt der Varianzen $\Delta q = \langle q^2\rangle - \langle q\rangle^2$ und $\Delta p = \langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2$ und interpretieren Sie dies physikalisch.
Hinweis: $\int du \frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{2}\left(\sin^{-1}(u) - u\sqrt{1-u^2}\right)$

Aufgabe 2: Liouville-Gleichung eines harmonischen Oszillators (11 Punkte)

Betrachten Sie einen klassischen harmonischen Oszillator, dessen Hamilton-Funktion durch (1) gegeben ist und der den Anfangsbedingungen $q(0) = q_0$ und $p(0) = p_0$ genügt.

(a) Stellen Sie die Liouville-Gleichung des harmonischen Oszillator auf und lösen Sie diese mit der Anfangsbedingung $\rho(p, q, 0) = \delta(q - q_0)\delta(p - p_0)$. Verwenden Sie dazu die Methode der Charakteristiken.

(b) Betrachten Sie nun eine stationäre Verteilung, d.h. es gilt $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$. Zeigen Sie, dass dann $\rho(q, p, t) = f(H(q, p))$ gelten muss, wobei f eine beliebige Funktion ist.
Hinweis: Man kann in jedem Fall $\rho(p, q, t) = f(A(q, p, t))$ annehmen, wobei A eine beliebige Phasenraumfunktion ist. Zeigen Sie dann mit Hilfe der Liouville-Gleichung, dass $A(q, p, t)$ eine Erhaltungsgröße ist.

(c) Gehen Sie nun von der stationären Verteilung $\rho(H) = C \exp(-\beta H)$ aus, wobei C eine Normierungskonstante und $\beta = 1/(k_\mathrm{B}T)$ die inverse Temperatur und k_B die Boltzmann-Konstante ist. Berechnen Sie damit die Erwartungswerte $\langle q\rangle$, $\langle p\rangle$, $\langle q^2\rangle$, $\langle p^2\rangle$ und interpretieren Sie diese physikalisch.
Hinweis: $\int_\mathbb{R} \mathrm{d}u\, u^2 \exp(-au^2) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a} \int_\mathbb{R} \mathrm{d}u\, \exp(-au^2) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

(d) Berechnen Sie nun das Produkt der Varianzen von q und p, also $\Delta q \Delta p$ und interpretieren Sie diese physikalisch im Vergleich zu dem Ergebnis aus Aufgabe 1 (e).

Aufgabe 3: Poisson-Klammer (8 Punkte)

Die Poisson-Klammer besitzt die folgenden Eigenschaften:
Gegeben seien beliebige Phasenraumfunktionen u, v, w und Konstanten a, b
Antikommutativität: $\{u, v\} = -\{v, u\}$
Bilinearität: $\{au + bv, w\} = a\{u, w\} + b\{v, w\}$, $\{w, au + bv\} = a\{w, u\} + b\{w, v\}$
Leibniz-Regel: $\{uv, w\} = u\{v, w\} + \{u, w\}v$, $\{u, vw\} = v\{u, w\} + \{u, v\}w$
Jacobi-Identität: $\{u, \{v, w\}\} + \{w, \{u, v\}\} + \{v, \{w, u\}\} = 0$

(a) Beweisen Sie die obigen Eigenschaften der Poisson-Klammer. Zeigen Sie ebenfalls, dass $\{u, u\} = 0$ gilt.

(b) Bestimmen Sie die Poisson-Klammer zwischen allen Kombinationen der Phasenraumvariablen x, y, z, p_x, p_y, p_z.

(c) Bestimmen Sie die Poisson-Klammer zwischen den Komponenten des Drehimpulses L_x, L_y, L_z. In welcher Beziehung stehen die Drehimpulskomponenten zueinander? Bestimmen Sie desweiteren $\{L_i, \vec{L}^2\}$ für $i = x, y, z$.