Arbeitsblatt 4 — 12.11.2019

Mathematischer Formalismus II

Auf diesen Übungsblatt folgen einige weitere Übungen zum mathematischen Formalismus der Quantenmechanik. Die erste Aufgabe beschäftigt sich mit der Matrixexponentialfunktion. In der zweiten Aufgabe werden Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren zweier hermitescher und vertauschbarer Operatoren bestimmen und die physikalische Bedeutung eines solchen Operatorpaars kennenlernen. Die dritte Aufgabe behandelt die Darstellung von Zuständen und Operatoren in verschiedenen Orthonormalbasen.

Aufgabe 1: Matrixexponentialfunktion (10 Punkte)

Betrachten Sie eine zweidimensionale komplexe Matrix $\hat{A} \in \mathbb{C}^2$ mit

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

(a) Berechnen Sie einen expliziten Ausdruck für die Matrixexponentialfunktion $\hat{T}(\alpha) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\hat{A}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, (i) mit Hilfe einer Reihendarstellung und (ii) mit Hilfe der Spektraldarstellung von $\hat{T}(\alpha)$.

(b) Zeigen Sie, dass sich die Ableitung von $\hat{T}(\alpha)$ nach α komponentenweise durchführen lässt, d.h.

$$\left(\frac{\mathrm{d}\hat{T}(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}\right)_{jk} = \frac{\mathrm{d}\hat{T}_{jk}(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}. \tag{2}$$

Aufgabe 2: Matrixdarstellungen von Operatoren (10 Punkte)

Betrachten Sie einen dreidimensionalen Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit einer Orthonormalbasis $\mathcal{B} = \{|e_i\rangle,\ i = 1, 2, 3\}$, auf welchem die Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ durch die folgenden Abbildungen definiert sind:

$$\begin{aligned}
\hat{A}|e_1\rangle &:= 3|e_1\rangle - \mathrm{i}\sqrt{2}|e_2\rangle + |e_3\rangle, & \hat{B}|e_1\rangle &:= |e_1\rangle + \mathrm{i}\sqrt{2}|e_2\rangle + |e_3\rangle \\
\hat{A}|e_2\rangle &:= \mathrm{i}\sqrt{2}|e_1\rangle + 2|e_2\rangle - \mathrm{i}\sqrt{2}|e_3\rangle, & \hat{B}|e_2\rangle &:= -\mathrm{i}\sqrt{2}|e_1\rangle + \mathrm{i}\sqrt{2}|e_3\rangle \\
\hat{A}|e_3\rangle &:= |e_1\rangle + \mathrm{i}\sqrt{2}|e_2\rangle + 3|e_3\rangle, & \hat{B}|e_3\rangle &:= |e_1\rangle - \mathrm{i}\sqrt{2}|e_2\rangle + |e_3\rangle
\end{aligned} \tag{3}$$

(a) Berechnen Sie die Matrixdarstellungen der Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

(b) Zeigen Sie, dass $\hat{A}$ und $\hat{B}$ selbstadjungiert und vertauschbar sind. Welche physikalische Bedeutung hat ein solches Operatorpaar?

(c) Bestimmen Sie die Eigenwerte von $\hat{A}$ und $\hat{B}$, sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten. Bestimmen Sie außerdem ein Orthonormalsystem $\mathcal{S} = \{|f_i\rangle,\ i = 1, 2, 3\}$ aus gemeinsamen Eigenvektoren von $\hat{A}$ und $\hat{B}$.

Aufgabe 3: Basiswechsel (10 Punkte)

Betrachten Sie einen zweidimensionalen Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit Orthonormalbasen $\mathcal{A} = \{|a_i\rangle,\ i = 1, 2\}$ und $\mathcal{B} = \{|b_i\rangle,\ i = 1, 2\}$ mit

$$|b_{1/2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|a_1\rangle \pm \mathrm{i}|a_2\rangle\right). \tag{4}$$

(a) Der unitäre Operator $\hat{U}$ beschreibe den Basiswechsel von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$. Drücken Sie diesen zunächst in der Braket-Schreibweise aus und bestimmen Sie anschließend dessen Matrixdarstellung $\hat{U}^{\mathcal{A}}$ in der Basis $\mathcal{A}$.

(b) Betrachten Sie nun einen Vektor $|\chi\rangle$, welcher in der Basis $\mathcal{A}$ die Darstellung $\chi^{\mathcal{A}} = 1/\sqrt{2}(1, 1)^{\mathrm{T}}$ besitzt. Geben Sie die entsprechende Darstellung $\chi^{\mathcal{B}}$ in der Basis $\mathcal{B}$ an.

(c) Betrachten Sie zuletzt einen Operator $\hat{T}$, welcher bezüglich der Basis $\mathcal{A}$ die Matrixdarstellung

$$\hat{T}^{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Bestimmen Sie die Matrixdarstellung $\hat{T}^{\mathcal{B}}$ des Operators in der Basis $\mathcal{B}$.