Arbeitsblatt 6 26.11.2019

Systeme mit wenigen Zuständen

Auf diesem Übungsblatt untersuchen wir die Eigenschaften von einfachen Quantensystemen: Dichteoperator, Zeitentwicklung und Messungen von Zwei-Niveau-Systemen und Drei-Niveau-Systemen.

Aufgabe 1: Einfache Dichtematrizen (10 Punkte)

Solange ein System sich in einem reinen Zustand befindet lässt sich dieses mit Zustandsvektoren $|\psi\rangle$ beschreiben. Allerdings ist es in diesem Formalismus nicht möglich gemischte Zustände anzugeben, welche stattdessen die Anwendung von Dichtematrizen erfordern.
In dieser Aufgabe veranschaulichen wir diesen Formalismus am Beispiel eines Zwei-Niveau-Systems. Sie hatten bereits auf früheren Übungsblättern die Matrizen

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gesehen.

(a) Geben Sie die Eigenzustände und zugehörigen Eigenwerte von σ_z an.

Gegeben seien nun die drei Observablen A, B, C die in der Eigenbasis von σ_z die folgende Operatorendarstellung besitzen

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \hat{C} = \begin{pmatrix} 0 & 2i \\ -2i & 0 \end{pmatrix}.$$

Am Zustand eines Zwei-Niveau-Systems werden nun die folgenden Erwartungswerte gemessen

$$\langle A \rangle = 2, \ \langle B \rangle = \frac{1}{2}, \ \langle C \rangle = 0$$

(b) Bestimmen Sie hiermit die zugehörige 2x2 Dichtematrix $\hat{\rho}$ des Systems. Nutzen Sie hierfür auch die allgemeinen Eigenschaften einer Dichtematrix. Handelt es sich um einen reinen oder einen gemischten Zustand?

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit den Eigenwert $\sigma_z = 1$ in diesem Zustand zu messen?

(d) Bestimmen Sie die Mittelwerte $\langle \sigma_x \rangle$, $\langle \sigma_y \rangle$, $\langle \sigma_z \rangle$ im Zustand $\hat{\rho}$.

(e) Prüfen Sie ob die verallgemeinerte Heißenberg'sche Unschärferelation für den Zustand $\hat{\rho}$ für $\Delta\hat{A}\Delta\hat{C}$ erfüllt ist. Vergleichen Sie dies mit der Unschärferelation, wenn sich das System im Eigenzustand $|a_1\rangle$ zum Eigenwert $a_1 = 3$ befindet.

(f) Zeigen Sie, dass sich beide Seiten der Unschärferelation für zwei Observablen $\hat{D}, \hat{E}$ immer auf null reduzieren, wenn sich das System im Eigenzustand eines der beiden Operatoren befindet. Gilt dies auch für den Orts-und Impulsoperator?

Aufgabe 2: Zeitentwicklung eines Zwei-Niveau-Systems (10 Punkte)

In dieser Aufgabe sollen die Eigenschaften eines Zwei-Niveau-Systems, d.h. eines quantenmechanischen Systems mit zweidimensionalem Hilbertraum $\mathcal{H}$, untersucht werden. Der Hamilton-Operator dieses System $\hat{H}$ habe die orthonormierten Eigenzustände $|0\rangle$ und $|1\rangle$ mit den zugehörigen Energieeigenwerten $E_0 = -\frac{\hbar\omega}{2}$ und $E_1 = \frac{\hbar\omega}{2}$. In seiner Eigenbasis dargestellt besitzt $\hat{H}$ also die Form

$$\hat{H} = -\frac{\hbar\omega}{2}\left(|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|\right). \tag{1}$$

Ferner seien die Ab- und Aufsteige-Operatoren definiert durch $\hat{a} = |0\rangle\langle 1|$ bzw. $\hat{a}^\dagger = |1\rangle\langle 0|$.

(a) Berechnen Sie zunächst die später benötigten Größen $\{\hat{a}, \hat{a}^\dagger\}$, $\hat{a}^2$, $\hat{a}^{\dagger 2}$, $[\hat{H}, \hat{a}]$ und $[\hat{H}, \hat{a}^\dagger]$.

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenzustände des Operators $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$. Drücken Sie damit den Hamilton-Operator $\hat{H}$ durch $\hat{N}$ und den Identitäts-Operator $\mathbb{1}$ aus.
Zwischenergebnis: $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{N} - \mathbb{1}/2)$.

(c) Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinde sich das System im Eigenzustand des Operators $\hat{A} := \hat{a}+\hat{a}^\dagger$. Bestimmen Sie die Erwartungswerte von $\hat{A}$ und $\hat{A}^2$, sowie die Standardabweichung $\sigma_{\hat{A}} := \sqrt{\langle\hat{A}^2\rangle - \langle\hat{A}\rangle^2}$ zu einem beliebigen Zeitpunkt t.

(d) Betrachten Sie nun den Operator $\hat{B} := \mathrm{i}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)$ und berechnen Sie für den Anfangszustand aus (c) die Erwartungswerte von $\hat{B}$ und $\hat{B}^2$, sowie die Standardabweichung $\sigma_{\hat{B}} := \sqrt{\langle\hat{B}^2\rangle - \langle\hat{B}\rangle^2}$ zu einem beliebigen Zeitpunkt t. Verfizieren Sie damit, dass die Operatoren die Heisenberg'sche Unschärfe-Relation erfüllen.

Aufgabe 3: Zeitentwicklung eines Drei-Niveau-Systems (10 Punkte)

Der Hamilton-Operator eines Drei-Niveau-Systems sei gegeben durch die Matrix

$$\hat{H} = \hbar\omega\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Des weiteren seien zwei weitere Observablen $\hat{A}, \hat{B}$ gegeben

$$\hat{A} = \lambda\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix},\ \hat{B} = \mu\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},$$

mit $\omega, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und normierten Eigenvektoren der Observablen $\hat{A},\ \hat{B},\ \hat{H}$.

(b) Das System befinde sich anfangs im Zustand, mit $1 = |c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2$,

$$|S(0)\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Erwartungswerte der Observablen in diesem Zustand.

(c) Wie entwickeln sich die Erwartungswerte aller drei Observablen mit der Zeit? Welche Messwerte sind für die verschiedenen Operatoren möglich? Wie entwickeln sich die Wahrscheinlichkeiten dieser Messwerte mit der Zeit?