TP2: Quantenmechanik
WS 19/20

Universität Stuttgart

Arbeitsblatt 9 17.12.2019

Heisenbergbild

Auf diesem Übungsblatt betrachten Sie die Zeitentwicklung einer Observable für verschiedene Potentiale mit Hilfe des Heisenbergbildes.

Aufgabe 1: Freies Teilchen im Heisenbergbild (10 Punkte)

Betrachten Sie ein freies Teilchen der Masse m, d.h. mit dem Hamiltonoperator $\hat{H}_{\mathrm{S}} = \frac{1}{2m}\hat{p}_{\mathrm{S}}^2$. Der Index S bezeichnet hierbei das Schrödingerbild.

(a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung des Ortsoperators $\hat{x}_{\mathrm{H}}(t)$ und des Impulsoperators $\hat{p}_{\mathrm{H}}(t)$ im Heisenbergbild auf und lösen Sie diese mit den Anfangsbedingungen $\hat{x}_{\mathrm{H}}(0) = \hat{x}_{\mathrm{S}}$ und $\hat{p}_{\mathrm{H}}(0) = \hat{p}_{\mathrm{S}}$.

(b) Stellen Sie $\hat{x}_{\mathrm{H}}(t)$ und $\hat{p}_{\mathrm{H}}(t)$ im Ortsraum dar.

(c) Drücken Sie die Erwartungswerte des Ort- und des Impulsoperators zum Zeitpunkt t durch die Erwartungswerte zum Zeitpunkt $t = 0$ aus.

(d) Berechnen Sie die Kommutatoren $[\hat{x}_{\mathrm{H}}(t_2), \hat{x}_{\mathrm{H}}(t_1)]$, $[\hat{p}_{\mathrm{H}}(t_2), \hat{p}_{\mathrm{H}}(t_1)]$ und $[\hat{x}_{\mathrm{H}}(t_2), \hat{p}_{\mathrm{H}}(t_1)]$.

Aufgabe 2: Teilchen im konstanten elektrischen Feld (10 Punkte)

Gegeben sei ein Teilchen mit Masse m und Ladung q in einem elektrischen Feld der Feldstärke $\mathcal{E}$. In diesem Fall ist der Hamiltonoperator gegeben durch

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - q\mathcal{E}\hat{x} \tag{1}$$

(a) Bestimmen Sie die Heisenberg'schen Bewegungsgleichungen für den Ort $\hat{x}_{\mathrm{H}}(t)$ und den Impuls $\hat{p}_{\mathrm{H}}(t)$ und lösen Sie diese.

(b) Bestimmen Sie die zugehörigen Mittelwerte $\langle \hat{x}_{\mathrm{H}}(t) \rangle$ und $\langle \hat{p}_{\mathrm{H}}(t) \rangle$ in Abhängigkeit ihrer Anfangswerte. Geben Sie außerdem ihre Varianzen $\Delta\hat{x}_{\mathrm{H}}(t)^2$ und $\Delta\hat{p}_{\mathrm{H}}(t)^2$ an. Betrachten Sie zuletzt das Verhältnis zwischen der Fluktuation des Ortes und seines Mittelwerts $\frac{\Delta\hat{x}_{\mathrm{H}}(t)}{\langle \hat{x}_{\mathrm{H}}(t) \rangle}$ für große Zeiten $t \gg 1$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

(c) Betrachten Sie nun den Anfangszustand mit der Wellenfunktion

$$\Psi(x, t = 0) = C\frac{e^{ik_0 x}}{x^2 + a^2} \tag{2}$$

mit der Normierungskonstante $C = \sqrt{\frac{2a^3}{\pi}}$. Es handelt sich hierbei um ein Teilchen am Ort $\langle \hat{x} \rangle = 0$ mit einem Impuls $\langle \hat{p} \rangle = \hbar k_0$, das in beiden Größen eine gewisse Unschärfe besitzt. Bestimmen Sie für diesen Anfangszustand die Varianz von Ort und Impuls für verschiedene Zeiten t.

Aufgabe 3: Eigenschaften von Heisenbergoperatoren (10 Punkte)

In dieser Aufgabe werden einige Eigenschaften des Heisenbergbildes betrachtet.

(a) Zeigen Sie, dass für einen Hamiltonian der Form $\hat{H} = \hat{p}^2/(2m) + \hat{V}(\hat{x}_\mathrm{H})$ auch in der Quantenmechanik formal die Newtongleichung $\mathrm{m}\ddot{\hat{x}}_\mathrm{H} = -\partial \hat{V}/\partial \hat{x}_\mathrm{H} =: \hat{F}_\mathrm{H}$ gilt, mit $\hat{x}_\mathrm{H}$ dem Heisenbergbild des Positionsoperators

Betrachten Sie nun einen allgemeinen Operator $\hat{O}, \hat{O}_\mathrm{H}$ im Schrödinger- und im Heisenbergbild. Aus dem Klassischen würde man erwarten, dass die Zeitableitung des Quadrats dieses Operators die Form

$$\frac{d\hat{A}(t)^2}{dt} = 2\hat{A}(t)\frac{d\hat{A}(t)}{dt} \tag{3}$$

besitzt. Aufgrund der Nichtkommutativität der Operatoren ist dies jedoch nicht der Fall.

(b) Zeigen Sie, dass $d(\hat{O}_\mathrm{H})^2/dt = d(\hat{O}^2)_\mathrm{H}/dt$ gilt und bestimmen Sie dessen Differentialgleichung. Verglichen mit Gleichung (3), welche Korrekturen treten im quantenmechanischen Fall auf? Wann entspricht diese Gleichung (3)?

(c) Zeigen Sie, dass für den Ortsoperator

$$\frac{d\hat{x}_\mathrm{H}^2}{dt} = 2\hat{x}_\mathrm{H}\frac{d\hat{x}_\mathrm{H}}{dt} + \frac{\hbar}{m\mathrm{i}}\mathbb{1} \tag{4}$$

gilt.

(d) Zeigen Sie, dass für den Operator der kinetischen Energie $\hat{T}_\mathrm{H}$ die folgende Gleichung gilt

$$\frac{d\hat{T}_\mathrm{H}}{dt} = \frac{\hat{p}_\mathrm{H}\hat{F}_\mathrm{H}}{m} + \frac{1}{2m}[\hat{F}_\mathrm{H}, \hat{p}_h]. \tag{5}$$

Geben Sie die Differentialgleichung des Operators der kinetischen Energie explizit an, für ein harmonisches Potential $\hat{V}(x_\mathrm{H}) = \mathrm{m}\omega^2\hat{x}_\mathrm{H}^2/2$.