Arbeitsblatt 12 21.01.2020

Drehimpulse und Spin in der Quantenmechanik

In diesem Arbeitsblatt betrachten wir wie sich Drehimpulse und im Speziellen Spins in der Quantenmechanik beschreiben lassen. Als Beispiele dafür betrachten den dreidimensionalen harmonischen Oszillator und ein Spin-$1/2$-Teilchen im homogenen Magnetfeld, welches das Stern-Gerlach-Experiment beschreibt.

Aufgabe 1: Messung des Drehimpulses für $l = 1$ (10 Punkte)

Betrachten Sie ein beliebiges Quantensystem mit der Drehimpulsquantenzahl $l = 1$ Aus der Vorlesung sind Ihnen die folgenden Eigenschaften der Drehimpulsoperatoren bekannt

$$\begin{aligned}
\hat{J}_z|l,m\rangle &= m\hbar|l,m\rangle \\
\hat{J}_+|l,m\rangle &= \hbar\sqrt{l(l+1)-m(m+1)}|l,m+1\rangle \\
\hat{J}_-|l,m\rangle &= \hbar\sqrt{l(l+1)-m(m-1)}|l,m-1\rangle \\
\hat{J}_x &= \frac{1}{2}\left(\hat{J}_+ + \hat{J}_-\right) \\
\hat{J}_y &= \frac{1}{2i}\left(\hat{J}_+ - \hat{J}_-\right)
\end{aligned} \tag{1}$$

mit $m = \{-l, -l+1, \cdots, l-1, l\}$ und $\hat{J}_-|l,-l\rangle = 0$, $\hat{J}_+|l,l\rangle = 0$.

(a) Nutzen Sie diese Eigenschaften um die Matrizendarstellung von $\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z$ in der $|l,m\rangle$ Basis für $l = 1$ zu finden. Was sind die Eigenwerte dieser Matrizen?

(b) Wir messen nun den Drehimpuls entlang einer Achse $\vec{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$, welches im Winkel θ zur z-Achse steht. Bestimmen Sie die zugehörige Drehimpulsmatrix $\hat{J}_n$ per Konstruktion aus $\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z$.

(c) Wir erhalten nun den Eigenwert $+\hbar$ nach Messung des Drehimpulses entlang der Achse $\vec{n}$. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür direkt im Anschluss den Eigenwert $+\hbar$ entlang der z-Achse zu bestimmen?

Aufgabe 2: Dreidimensionaler Oszillator (10 Punkte)

Betrachten Sie einen dreidimensionalen harmonischen Oszillator

$$H = \sum_i \hat{p}_i^2/(2m) + m\omega^2\hat{x}_i^2/2 \tag{2}$$

mit Quantenzahlen n_i, $i = x, y, z$.

(a) Geben Sie die zugehörigen Leiteroperatoren in Abhängigkeit der Orts- und Impulsoperatoren an. Bestimmen Sie die Komponenten des Drehimpulses $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$ in Abhängigkeit der Leiteroperatoren. Berechnen Sie $[\hat{L}_z, \hat{N}_z]$, mit $\hat{N}_z = \hat{a}_z^\dagger \hat{a}_z$

(b) Betrachten Sie alle Zustände deren Quantenzahlen $n_x + n_y + n_z = 1$ erfüllen. Bestimmen Sie alle Linearkombinationen die Eigenzustände von $\hat{L}_z$ bilden. Bestimmen Sie ebenfalls die zugehörigen Eigenwerte von $\hat{L}_z$.

Aufgabe 3: Spin im Magnetfeld (10 Punkte)

Betrachten Sie ein ruhendes Spin-1/2-Teilchen in einem homogenen Magnetfeld $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{e}_z$ in z-Richtung. Der Operator des magnetischen Moments $\hat{\boldsymbol{\mu}} = \gamma\hat{\boldsymbol{S}}$ des Teilchens ist über das gyromagnetische Verhältnis $\gamma \in \mathbb{R}$ mit dessen Spin-Operator $\hat{\boldsymbol{S}} = \left(\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z\right)$ verknüpft. Analog zum klassischen Fall ist der Hamilton-Operator des Teilchens gegeben durch

$$\hat{H} = -\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{\mu}} = -\gamma B\hat{S}_z. \tag{3}$$

(a) Bestimmen Sie die Darstellung des Hamilton-Operators in der Basis der Eigenzustände $|\chi_\pm\rangle$ der z-Komponente $\hat{S}_z$ des Spins. Bestimmen Sie die Eigenwerte und die Eigenzustände des Hamilton-Operators.

(b) Das Teilchen befinde sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand $|\psi(0)\rangle = \alpha|\chi_+\rangle + \beta|\chi_-\rangle$. Bestimmen Sie den Zustand $|\psi(t)\rangle$ zum Zeitpunkt t.

(c) Bestimmen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeiten dafür, das Teilchen in den Eigenzustände von $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$ und $\hat{S}_z$ zu finden.