

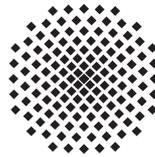
Spezielle und Allgemeine Relativitätstheorie

Grundlagen, Anwendungen in Astrophysik und Kosmologie sowie
relativistische Visualisierung
Lösungen der Übungsaufgaben

Sebastian Boblest, Thomas Müller, Günter Wunner

17. Mai 2022

Institut für Theoretische Physik I
Pfaffenwaldring 57
Universität Stuttgart
70550 Stuttgart



Visualisierungsinstitut
Allmandring 19
Universität Stuttgart
70569 Stuttgart



 Springer

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
2	Spezielle Relativitätstheorie	3
3	Allgemeine Relativitätstheorie	15
4	Sternentwicklung	29
5	Kosmologie	33

1 Einführung

1.1 Foucault'scher Drehspiegel

$U = 20\,000$ Umdrehungen pro Sekunde entsprechen $\omega = 2\pi U$. Mit der Bedingung

$$\omega t = \alpha, \quad (\text{L.1.1})$$

sowie

$$t = \frac{2r}{c} \quad (\text{L.1.2})$$

und

$$\alpha = \frac{0,5/360}{2}\pi \quad (\text{L.1.3})$$

ergibt sich

$$r = 10,4 \text{ m}. \quad (\text{L.1.4})$$

1.2 Gravitationspotential in einer Hohlkugel

Das Gravitationspotential ϕ im Inneren einer Hohlkugel mit Radius R können wir wie folgt bestimmen. Zur Vereinfachung der Rechnung betrachten wir einen Punkt P im Inneren der Hohlkugel, der sich (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) auf der z -Achse befinde. Seine Position ist daher durch die Koordinaten $(0,0,z_p)$ gegeben. Jedes Massenelement dm der Hohlkugel trägt einen Beitrag $d\phi$ zum Gravitationspotential bei. Mit der Flächendichte σ und dem Flächenelement dA ergibt sich das Massenelement zu $dm = \sigma dA$. Wir erhalten so

$$d\phi = \frac{Gdm}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_p)^2}}, \quad (\text{L.1.5})$$

wobei G die Newton'sche Gravitationskonstante und der Wurzelausdruck die Entfernung des Massenelements dm vom Punkt P darstellt.

Gehen wir nun zu sphärischen Koordinaten über mit

$$x = R \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = R \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = R \cos \vartheta, \quad dA = R \sin \vartheta d\vartheta d\varphi, \quad (\text{L.1.6})$$

so lässt sich (L.1.5) umformulieren zu

$$d\phi = \frac{G\sigma R \sin \vartheta d\vartheta d\varphi}{\sqrt{R^2 \sin^2 \vartheta + (R \cos \vartheta - z_p)^2}} = \frac{G\sigma R \sin \vartheta d\vartheta d\varphi}{\sqrt{R^2 - 2Rz_p \cos \vartheta + z_p^2}}. \quad (\text{L.1.7})$$

Das Gesamtpotential am Punkt P erhalten wir nun durch Integration von (L.1.7) über die gesamte Kugeloberfläche,

$$\phi = \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\phi = 2\pi G\sigma R \int_{\vartheta=0}^{\pi} \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{\sqrt{R^2 - 2Rz_p \cos \vartheta + z_p^2}}. \quad (\text{L.1.8})$$

Die Stammfunktion des Integranden lässt sich leicht finden, und wir erhalten

$$\phi = 2\pi G\sigma R \left[\frac{2}{2Rz_p} \sqrt{R^2 + z_p^2 - 2Rz_p \cos \vartheta} \right]_0^{\pi} = 4\pi G\sigma. \quad (\text{L.1.9})$$

Das Gravitationspotential ϕ ist unabhängig vom Ort des Punktes und somit auch konstant innerhalb der gesamten Hohlkugel.

1.3 Gravitation und Coulomb-Kraft im Wasserstoffatom

Die Entfernung zwischen Elektron und Proton geht in beide Kräfte gleich ein und kürzt sich daher. Wir müssen also nur das Verhältnis

$$\frac{F_{\text{el}}}{F_{\text{m}}} = \frac{e^2/(4\pi\epsilon_0)}{Gm_e m_p} = 2,3 \cdot 10^{39} \quad (\text{L.1.10})$$

mit Hilfe der Werte in Tab. A.1 berechnen.

1.4 Schwarzes Loch aus Wasser

Mit $M = (4/3)\pi r^3 \rho_{\text{m}}$ ergibt sich

$$r_s = 2G \frac{M}{c^2} = \frac{8}{3} \pi \frac{G\rho_{\text{m}}}{c^2} r^3 \stackrel{!}{=} r, \quad (\text{L.1.11})$$

also

$$r(\rho_{\text{m}}) = \frac{c}{\left(\frac{8}{3}G\pi\rho_{\text{m}}\right)^{1/2}}. \quad (\text{L.1.12})$$

1. Mit $\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 1000 \text{ kgm}^{-3}$ ergibt sich

$$r(\rho_{\text{H}_2\text{O}}) = 4,0 \cdot 10^{11} \text{ m} \approx 2,68 \text{ AU}. \quad (\text{L.1.13})$$

2. Mit den Werten aus Tab. 1.1 finden wir $\rho_{\text{☉}} \approx 5496 \text{ kgm}^{-3}$ und damit

$$r(\rho_{\text{☉}}) = 1,7 \cdot 10^{11} \text{ m} \approx 246 R_{\text{☉}}, \quad (\text{L.1.14})$$

mit $R_{\text{☉}} = 6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$.

3. 2 Protonen pro Kubikmeter entsprechen einer Dichte $\rho_{2\text{p}} = 3,3 \cdot 10^{-27} \text{ kgm}^{-3}$, d. h.

$$r(\rho_{2\text{p}}) = 2,2 \cdot 10^{26} \text{ m} = 2,3 \cdot 10^{10} \text{ ly}. \quad (\text{L.1.15})$$

Das entspricht etwa 1,6 mal der Hubble-Distanz aus Gleichung (23.12).

2 Spezielle Relativitätstheorie

3.1 Galilei-Invarianz der Newton'schen Bewegungsgleichung

In Abschn. 3.1 hatten wir die Newton'sche Bewegungsgleichung

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}} \quad (3.1)$$

angeführt, wobei \mathbf{F} die auf ein Teilchen der Masse m wirkende Kraft, \mathbf{r} dessen momentane Position und $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}$ dessen Beschleunigung ist. Bei der Untersuchung der Invarianz dieser Gleichung unter der Galilei-Transformation

$$\mathbf{r}' = \mathbf{D} \cdot \mathbf{r} - \mathbf{v}t - \mathbf{r}_0, \quad t' = t - t_0 \quad (3.2)$$

müssen wir verschiedene Spezialfälle berücksichtigen.

a) **Zeit-Translationsinvarianz:** $t \rightarrow t' = t - t_0$

Wie leicht zu sehen ist, ändert sich die Ableitung von \mathbf{r} nach der Zeit t nicht:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt'}, \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt'^2}. \quad (\text{L.2.1})$$

Damit Galilei-Invarianz gegeben ist, darf die Kraft \mathbf{F} nicht von der Zeit abhängen. Es muss also gelten, dass

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t - t_0). \quad (\text{L.2.2})$$

b) **Translationsinvarianz:** $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$

Da \mathbf{r}_0 eine konstante, zeitunabhängige Verschiebung ist, bleibt die zeitliche Ableitung von \mathbf{r} konstant:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2}. \quad (\text{L.2.3})$$

Hier darf nun die Kraft \mathbf{F} nicht absolut vom Ort abhängen, damit die Galilei-Invarianz erfüllt ist. Dies ist der Fall, wenn \mathbf{F} nur von Relativkoordinaten abhängt, also

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_1). \quad (\text{L.2.4})$$

Für die Transformationen $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$ und $\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0$ gilt dann

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_1) = \mathbf{F}(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2, \dot{\mathbf{r}}'_1). \quad (\text{L.2.5})$$

- c) **Eigentliche Galilei-Invarianz:** $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t - \mathbf{r}_0$, $t' = t - t_0$
 Die eigentliche Galilei-Transformation besteht neben der Zeit- und Ortstranslation auch noch aus einer Geschwindigkeitstransformation. Da die Zeit bei der Geschwindigkeitstransformation nur linear auftritt, gilt auch hier, dass die zweifache zeitliche Ableitung von \mathbf{r} gleich bleibt. Die Kraft \mathbf{F} müssen wir jedoch weiter einschränken, so dass sie auch nur von Relativgeschwindigkeiten abhängt:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2). \quad (\text{L.2.6})$$

In diesem Fall gilt dann

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2) = \mathbf{F}(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2, \dot{\mathbf{r}}'_1 - \dot{\mathbf{r}}'_2). \quad (\text{L.2.7})$$

- d) **Invarianz gegenüber Rotationen:** $\mathbf{r}' = \mathbf{D} \cdot \mathbf{r} - \mathbf{v}t - \mathbf{r}_0$, $t' = t - t_0$
 Nehmen wir auch noch Rotationen hinzu, so müssen wir jetzt berücksichtigen, dass sich die zweite zeitliche Ableitung von \mathbf{r} ändert. Es gilt

$$\frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt'^2} = \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\mathbf{D} \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \mathbf{v} \right) = \mathbf{D} \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}. \quad (\text{L.2.8})$$

Die Kraft \mathbf{F} darf sich jetzt auch gegenüber Rotationen nicht ändern, und es muss gelten

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2) = \mathbf{D}\mathbf{F}(\mathbf{D}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \mathbf{D}(\dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2)). \quad (\text{L.2.9})$$

Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn die Kraft als Gradient eines skalaren Potentials geschrieben werden kann.

3.2 Geschwindigkeitsadditionstheorem und der Fizeau-Versuch

Wir fanden für die Lichtgeschwindigkeit im sich mit Geschwindigkeit v bewegenden Medium mit Brechungsindex n der Wert

$$c_{\text{Med}\pm} = \frac{c}{n} \pm v \left(1 - \frac{1}{n^2} \right). \quad (\text{L.2.10})$$

Dabei ist c/n die Lichtgeschwindigkeit im Medium und von der Größenordnung her im Bereich der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum mit $\beta = 1/n$, während sicherlich $v \ll c$ gilt.

Wenn wir Gl. (3.37) für kleine β_1 und großes β_2 entwickeln, finden wir

$$\beta_3 \approx \beta_2 + \beta_1(1 - \beta_2^2). \quad (\text{L.2.11})$$

Mit $\beta_2 = 1/n$ ist das genau Gl. (L.2.10).

3.3 Geschwindigkeitsadditionstheorem bei Verwendung der Rapidität

Unter Verwendung der Definition (3.25) ergibt sich für die relevanten Komponenten

$$\begin{aligned} [\mathbf{\Lambda}_{x1} \cdot \mathbf{\Lambda}_{x2}]_{11} &= \cosh(\theta_1) \cosh(\theta_2) + \sinh(\theta_1) \sinh(\theta_2) \\ [\mathbf{\Lambda}_{x1} \cdot \mathbf{\Lambda}_{x2}]_{12} &= -[\cosh(\theta_1) \sinh(\theta_2) + \sinh(\theta_1) \cosh(\theta_2)] \\ [\mathbf{\Lambda}_{x1} \cdot \mathbf{\Lambda}_{x2}]_{21} &= [\mathbf{\Lambda}_{x1} \cdot \mathbf{\Lambda}_{x2}]_{12}, \quad [\mathbf{\Lambda}_{x1} \cdot \mathbf{\Lambda}_{x2}]_{22} = [\mathbf{\Lambda}_{x1} \cdot \mathbf{\Lambda}_{x2}]_{11} \end{aligned} \quad (\text{L.2.12})$$

und mit den angegebenen Identitäten (3.56) sofort das gesuchte Ergebnis.

Kap. 4 Physikalische Folgen der Lorentz-Invarianz

4.1 Das „Myonenparadoxon“

Im Ruhssystem der Myonen ergibt sich eine Längenkontraktion, d. h. die sich bewegendende Erde legt statt der vom Erdsystem aus gesehenen etwa 9-12 km eine um den Faktor $\gamma(\beta = 0,995) \approx 10$ verkürzte Strecke zurück, also ca. 0,9-1,2 km.

Kap. 6 Relativistische Mechanik

6.1 Rundreise auf Kreisbahn (für motivierte Rechner)

- a) Wir wollen unser Koordinatensystem wie in der Aufgabenstellung angeben so wählen, dass die Bewegung in der xy -Ebene abläuft. Um die Weltlinie eines wendenden Raumfahrers zu bestimmen, müssen wir die Ergebnisse des Abschnitts 6.8 mit der in der Aufgabe angegebenen Weltlinie

$$\begin{pmatrix} x(\tau) \\ y(\tau) \end{pmatrix} = d(\tau) \begin{pmatrix} \cos[\delta(\tau_1)] \\ \sin[\delta(\tau_1)] \end{pmatrix}. \quad (\text{L.2.13})$$

bis zum Einschwenken zusammensetzen. Wir haben also eine Bewegung, in deren erster Phase der Raumfahrer geradlinig beschleunigt, dann auf einer Kreisbahn wendet und abschließend auf dem Rückweg zur Erde abbremst.

Die Entfernung zum Ursprung, d.h. der Vorfaktor $d(\tau)$ nach einer bestimmten Zeit τ entspricht immer noch dem ersten Zweig von Gleichung (6.76), d.h. es ist

$$d(\tau) = \frac{c^2}{g} \left[\cosh\left(\frac{g}{c}\tau\right) - 1 \right]. \quad (\text{L.2.14})$$

Die Geschwindigkeit ergibt sich weiter aus dem ersten Zweig von Gleichung (6.76). Aus dieser Geschwindigkeit $\beta(\tau_1)$ folgt der Radius des Wendekreises zu

$$R(\tau_1) = \frac{c^2}{g} \sinh^2\left(\frac{g}{c}\tau\right). \quad (\text{L.2.15})$$

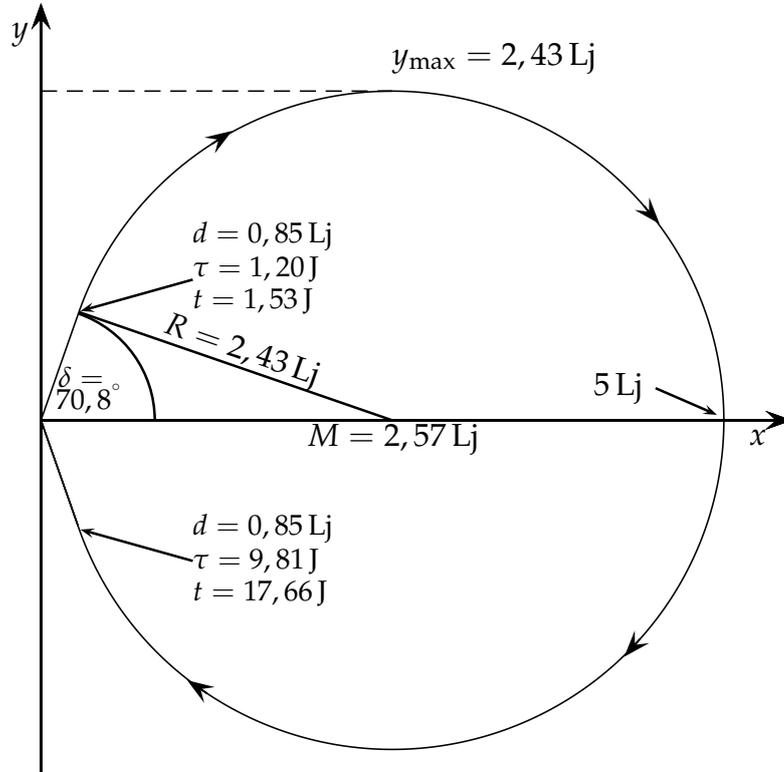


Abbildung 2.1: Skizze zum wendenden Raumfahrer. Beim Einschwenken auf den Wendkreis zur Eigenzeit τ_1 hat der Raumfahrer einen Abstand d zum Ursprung, wobei $d(\tau)$ dem Ausdruck für $x_{zw}(\tau)$ im ersten Zweig von Gleichung (6.76) entspricht.

Der Mittelpunkt dieses Kreises liegt auf der x -Achse. Seine Entfernung zum Ursprung ergibt sich zu

$$\begin{aligned} M(\tau_1) &= \sqrt{R(\tau_1)^2 + d(\tau_1)^2} \\ &= \frac{c^2}{g} \left[\cosh\left(\frac{g}{c}\tau_1\right) - 1 \right] \sqrt{\left[\cosh\left(\frac{g}{c}\tau_1\right) + 1 \right]^2 + 1}. \end{aligned} \quad (\text{L.2.16})$$

Diese Zusammenhänge werden anhand der Skizze in Abbildung 2.1 klar. Weiter wird der Winkel $\delta(\tau_1)$ durch

$$\delta(\tau_1) = \arctan\left[\frac{R(\tau_1)}{d(\tau_1)}\right] = \arctan\left[\cosh\left(\frac{g}{c}\tau_1\right) + 1\right] \quad (\text{L.2.17})$$

festgelegt. Der Raumfahrer muss unter diesem Winkel zur x -Achse von der Erde

losfliegen, um glatt auf den Wendekreis einschwenken zu können, d.h. die Weltlinie geht stetig und differenzierbar von der Beschleunigungsphase in die Wendephase über.

Der Ausdruck für den Winkel δ ist eine interessante Verallgemeinerung des nicht-relativistischen Ausdrucks. Mit $v(t) = gt$ und $x(t) = gt^2/2$ ergibt sich dort $\delta = \arctan(2)$ unabhängig von der Beschleunigungsdauer. Das ist unmittelbar einsichtig, da im nichtrelativistischen Fall sowohl der Wenderadius, als auch die in der Beschleunigungsphase zurückgelegte Strecke quadratisch von der Zeit abhängen und der Quotient damit zeitunabhängig ist. Wir erkennen also, dass der kleinste mögliche Winkel im relativistischen Fall gleich dem Winkel im nicht-relativistischen Fall $\delta(0) = \arctan(2) \approx 63,4^\circ$ ist, für alle anderen Fälle gilt $\arctan(2) < \delta < \pi/2$. Die Darstellung in Abbildung 2.1 zeigt deshalb ein maßstabgetreues Verhältnis der verschiedenen Streckenabschnitte und nicht etwa einen deutlich zu groß gezeichneten Wendekreis. Durch den in allen Fällen sehr großen Winkel δ wird bereits deutlich, dass eine solche Reise vermutlich nicht vorteilhaft im Vergleich zu einer geradlinigen Reise mit jeweils zwei Beschleunigungs- und zwei Abbremsphasen ist.

Mit diesen Zusammenhängen können wir jetzt die gesamte Weltlinie des Raumfahrers angeben. Wir erhalten

$$t_{\text{Zw}}(\tau) = \frac{c}{g} \begin{cases} \sinh\left(\frac{g}{c}\tau\right), & \text{für } \tau \leq \tau_1, \\ \sinh\left[\frac{g}{c}(\tau_1)\right] + \frac{g}{c}\gamma(\tau_1)(\tau - \tau_1), & \text{für } \tau_1 < \tau \leq \tau_2, \\ \sinh\left[\frac{g}{c}(\tau - \tau_2 - \tau_1)\right] + 2\sinh\left(\frac{g}{c}\tau_1\right) \\ \quad + \frac{g}{c}\gamma(\tau_1)(\tau_2 - \tau_1), & \text{für } \tau_2 < \tau \leq \tau_1 + \tau_2, \end{cases} \quad (\text{L.2.18})$$

für die Koordinatenzeit, bei der wir berücksichtigen, dass auf der Kreisbahn der Betrag der Geschwindigkeit und damit die Zeitdilatation konstant ist, und die Raumkurve

$$x_{\text{Zw}}(\tau) = \begin{cases} d(\tau) \begin{pmatrix} \cos(\delta(\tau_1)) \\ \sin(\delta(\tau_1)) \end{pmatrix}, & \text{für } \tau \leq \tau_1, \\ \begin{pmatrix} M(\tau_1) \\ 0 \end{pmatrix} + R(\tau_1) \begin{pmatrix} \sin[\omega(\tau_1)(\tau - \tau_1) - \delta(\tau_1)] \\ \cos[\omega(\tau_1)(\tau - \tau_1) - \delta(\tau_1)] \end{pmatrix}, & \text{für } \tau_1 < \tau \leq \tau_2, \\ d(\tau_2 - \tau) \begin{pmatrix} \cos(\delta(\tau_1)) \\ \sin(\delta(\tau_1)) \end{pmatrix}, & \text{für } \tau_2 < \tau \leq \tau_1 + \tau_2. \end{cases} \quad (\text{L.2.19})$$

In diesem Ausdruck ist dabei berücksichtigt, dass der Raumfahrer im zweiten Zweig nicht nur einen Halbkreis durchfliegen muss, sondern einen Gesamtwendewinkel $\alpha = \pi + 2\delta$ zurücklegt. Dementsprechend ergibt sich die Zeit τ_2 , zu der er die Wende abgeschlossen hat und beginnt, geradlinig abbremsend zur Erde

zurückzufiegen, aus

$$\begin{aligned}\tau_2 &= \tau_1 + \frac{2\delta(\tau_1) + \pi}{\omega(\tau_1)} \\ &= \tau_1 + \frac{c}{g} (2\delta(\tau_1) + \pi) \sinh\left(\frac{g}{c}\tau_1\right),\end{aligned}\tag{L.2.20}$$

mit der Kreisfrequenz

$$\omega(\tau_1) = \frac{g}{c} \frac{1}{\sinh\left(\frac{g}{c}\tau_1\right)}.\tag{L.2.21}$$

Er kehrt dann zum Zeitpunkt $\tau = \tau_1 + \tau_2$ wieder zur Erde zurück. Um diese Reise mit der üblichen Rundreise mit zwei Beschleunigungs- und zwei Abbremsphasen vergleichen zu können, müssen wir noch die für die Reise zu einem Objekt in einer bestimmten Entfernung d befindlichen Objekt benötigte Beschleunigungsdauer bestimmen.

- b) Der am weitesten von der Erde entfernte Punkt, der auf der Reise erreicht wird, befindet sich bei der x -Koordinate

$$\begin{aligned}L(\tau_1) &= M(\tau_1) + R(\tau_1) \\ &= \frac{c^2}{g} \left[\cosh\left(\frac{g}{c}\tau_1\right) - 1 \right] \left[\sqrt{\left[\cosh\left(\frac{g}{c}\tau_1\right) + 1 \right]^2 + 1} + \cosh\left(\frac{g}{c}\tau_1\right) + 1 \right].\end{aligned}\tag{L.2.22}$$

Die Gleichung $L(\tau_1) = s$ lässt sich analytisch nach τ_1 umstellen um die nötige Beschleunigungsdauer für eine Reise zu einem Objekt in der Entfernung s zum Ursprung zu erhalten, wir wollen aber diese Rechnung nicht detailliert ausführen. Das Ergebnis ist

$$\tau_1(s) = \frac{c}{g} \operatorname{arcosh} \left[\frac{1 + \frac{gs}{c^2} \sqrt{2\frac{gs}{c^2} + 5}}{2\frac{gs}{c^2} + 1} \right].\tag{L.2.23}$$

Die zugehörige Gesamtreisedauer ist dann $\tau_{\text{f}}(s) = \tau_1(s) + \tau_2[\tau_1(s)]$, der dafür resultierende Ausdruck ist allerdings sehr kompliziert und wir verzichten daher auf eine Darstellung.

- c) Rundreisen zu bestimmten Zielen mit den gerade diskutierten Methoden vergleichen wir mit dem normalen Zwillingsparadoxon unter Verwendung der in Gleichung (6.85) dafür angegebenen Reisedauer. In Tabelle 2.1 sind Gesamtreisezeiten sowie die vergangene Koordinatenzeit für typische Entfernungen zu nahen Sternen, dem Andromedanebel, sowie dem Ende des beobachtbaren Universums gezeigt. In allen Fällen ist die Reise mit Wendemanöver länger. Außerdem lassen sich sehr weit entfernte Ziele damit nicht zu Lebzeiten des Raumfahrers erreichen.

Tabelle 2.1: Vergleich der Reisen zu verschiedenen Zielen im klassischen Zwillingsparadoxon und bei einem Wendemanöver. Gezeigt sind die vergangene Eigenzeit τ_f des Raumfahrers und die vergangene Koordinatenzeit $t(\tau_f)$ am Ende der Reise. Betrachtet werden typische Entfernungen zu nahen Sternen, eine Reise zum Andromedanebel und zum Ende des sichtbaren Universums. Siehe auch Ref. Müller et al., Am. J. Phys. **76**, 360–373 (2008).

Entfernung [Lj]	Klassische Reise		Wendemanöver	
	τ_f [Jahre]	$t(\tau_f)$ [Jahre]	τ_f [Jahre]	$t(\tau_f)$ [Jahre]
5	7,54	13,32	11,01	19,19
100	18,04	203,84	47,13	317,78
$2,00 \times 10^6$	56,33	$4,00 \times 10^6$	6196,02	$6,28 \times 10^6$
$1,37 \times 10^{10}$	90,54	$2,74 \times 10^{10}$	$5,11 \times 10^5$	$3,62 \times 10^{10}$

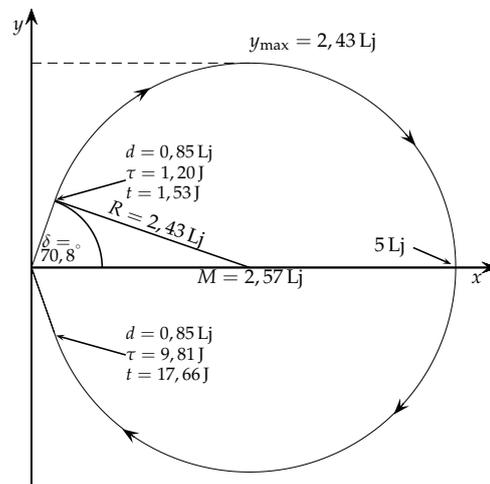


Abbildung 2.2: Der wendende Raumfahrer auf einer Reise zu einem 5 Lichtjahre entfernten Objekt. Die Weltlinie des Raumfahrers ist bereits bei dieser Reise fast ein vollständiger Kreis, so startet der Raumfahrer um einen Winkel von über 70° gegen die Richtung zu seinem Ziel und befindet sich bei einer Gesamtreisedauer von 19,19 Jahren etwa 16 Jahre auf dem Wendekreis.

Dies liegt daran, dass er auf der Kreisbahn nicht mit einer so hohen Maximalgeschwindigkeit fliegen kann, wie auf dem direkten Weg. Die Zeitdilatation ist damit wesentlich geringer. In Abbildung 2.2 sind zusätzlich die Werte der relevanten Größen für eine Reise zu einem 5 Lichtjahre entfernten Objekt zusammengefasst.

6.2 Relativistische Beschleunigung

Das Skalarprodukt zwischen der Vierergeschwindigkeit u^μ und der Viererbeschleunigung b^μ können wir wie folgt bestimmen. Mit der Relation (6.8) zwischen den beiden Größen erhalten wir

$$u_\mu b^\mu = \eta_{\mu\nu} u^\mu b^\nu = \eta_{\mu\nu} u^\mu \frac{du^\nu}{d\tau} = \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \frac{d}{d\tau} (u^\mu u^\nu) = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (-c^2) = 0. \quad (\text{L.2.24})$$

Die Viererbeschleunigung steht also orthogonal zur Vierergeschwindigkeit.

Das Quadrat der Viererbeschleunigung kann mit Hilfe der Darstellung aus (6.10) wie folgt umgeschrieben werden,

$$\begin{aligned} b_\mu b^\mu &= \eta_{\mu\nu} b^\mu b^\nu = -(\dot{b}^0)^2 + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \\ &= c^2 \gamma^8 \left[-(\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 + \frac{\dot{\boldsymbol{\beta}}^2}{\gamma^4} + \frac{2}{\gamma^2} (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 + (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 \beta^2 \right] \\ &= c^2 \gamma^4 \left[\dot{\boldsymbol{\beta}}^2 + \gamma^2 (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{L.2.25})$$

Da $b_\mu b^\mu > 0$ ist nach Abschn. 5.1.1 die Viererbeschleunigung raumartig.

Kap. 7 Kovariante Formulierung der Elektrodynamik

7.1 Feldtransformation bei allgemeinem Boost

Zur Berechnung eines allgemeinen Boosts für die elektrischen und magnetischen Felder benötigen wir einerseits die allgemeine Lorentztransformation (3.31),

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_x & -\gamma\beta_y & -\gamma\beta_z \\ -\gamma\beta_x & \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta_i\beta_j + \delta_{ij} & & \\ -\gamma\beta_y & & & \\ -\gamma\beta_z & & & \end{pmatrix}, \quad (\text{L.2.26})$$

und andererseits den Feldstärketensor (7.36) in kontravarianter Form,

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{L.2.27})$$

Zur Vereinfachung der Rechnung setzen wir hier $c = 1$. Die Boost-Transformation ergibt sich dann aus

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}. \quad (\text{L.2.28})$$

Anstelle die Summation über alle vier Indizes auf einmal durchzuführen, splitten wir zeit- und raumartige Teile auf. So schreiben wir

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^0_j \\ \Lambda^i_0 & \Lambda^i_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_j \\ -\gamma\beta^i & \delta^i_j + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta^i\beta_j \end{pmatrix} \quad (\text{L.2.29})$$

und

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} F^{00} & F^{0j} \\ F^{i0} & F^{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E^j \\ -E^i & \epsilon^{ij}{}_k B^k \end{pmatrix}. \quad (\text{L.2.30})$$

Hier haben wir uns das Levi-Civita-Symbol ϵ_{ijk} zu Nutze gemacht, das wie folgt definiert ist:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{wenn } (i,j,k) \text{ eine gerade Permutation von } (1,2,3) \text{ ist} \\ -1 & \text{wenn } (i,j,k) \text{ eine ungerade Permutation von } (1,2,3) \text{ ist} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\text{L.2.31})$$

Aus Symmetriegründen genügt es, wenn wir uns die Transformation für F^{00} , F^{0j} und F^{ij} anschauen. Zunächst folgt aus (L.2.28) für die 00-Komponente

$$\begin{aligned} F'^{00} &= \Lambda^0_0 \Lambda^0_0 F^{00} + \Lambda^0_0 \Lambda^0_j F^{0j} + \Lambda^0_i \Lambda^i_0 F^{i0} + \Lambda^0_i \Lambda^i_j F^{ij} \\ &= -\gamma^2 \beta_j E^j - \gamma^2 \beta_i \epsilon^{ij}{}_k B^k \beta_j + \gamma^2 \beta_i E^i = 0. \end{aligned} \quad (\text{L.2.32})$$

Der mittlere Term verschwindet, weil das Levi-Civita-Symbol antisymmetrisch ist und $\beta_i \beta_j$ symmetrisch. Wie zu erwarten verschwindet F'^{00} identisch.

Für die 0j-Komponente folgt

$$\begin{aligned} F'^{0j} &= \Lambda^0_0 \Lambda^j_0 F^{00} + \Lambda^0_i \Lambda^j_0 F^{i0} + \Lambda^0_0 \Lambda^j_n F^{0n} + \Lambda^0_i \Lambda^j_n F^{in} \\ &= -\gamma^2 \beta_i \beta^j E^i + \gamma \left(\delta^j_n + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \beta^j \beta_n \right) E^n - \gamma \beta_i \left(\delta^j_n + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \beta^j \beta_n \right) \epsilon^{in}{}_k B^k \\ &= \gamma E^j + \left[\frac{\gamma^3}{\gamma+1} - \gamma^2 \right] (\beta_i E^i) \beta^j - \gamma \beta_i \epsilon^{ij}{}_k B^k \\ &= \gamma E^j - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}) \beta^j + \gamma (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B})^j. \end{aligned} \quad (\text{L.2.33})$$

Im letzten Schritt haben wir berücksichtigt, dass $\beta_i E^i = \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}$ ist, und dass man das Kreuzprodukt mittels Levi-Civita-Symbol formulieren kann. Aus (L.2.33) folgt unmittelbar die zu zeigende Beziehung

$$\mathbf{E}' = \gamma(\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}). \quad (\text{L.2.34})$$

Für die ij -Komponente erhalten wir

$$\begin{aligned}
 F'^{ij} &= \Lambda^i_0 \Lambda^j_0 F^{00} + \Lambda^i_n \Lambda^j_0 F^{n0} + \Lambda^i_0 \Lambda^j_m F^{0m} + \Lambda^i_n \Lambda^j_m F^{nm} \\
 &= \left(\delta^i_j + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \beta^i \beta_n \right) \gamma \beta^j E^n - \gamma \beta^i \left(\delta^j_m + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \beta^j \beta_m \right) E^m \\
 &\quad + \left(\delta^i_n + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \beta^i \beta_n \right) \left(\delta^j_m + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \beta^j \beta_m \right) \epsilon^{nm}{}_k B^k \\
 &= \gamma E^i \beta^j + \frac{\gamma^3}{\gamma+1} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}) \beta^i \beta^j - \gamma \beta^i E^j - \frac{\gamma^3}{\gamma+1} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}) \beta^i \beta^j \\
 &\quad + \epsilon^{ij}{}_k B^k + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \left[\epsilon^{im}{}_k \beta^j \beta_m + \epsilon^{nj}{}_k \beta^i \beta_n \right] B^k. \tag{L.2.35}
 \end{aligned}$$

Die linke Seite von (L.2.35) lautet entsprechend

$$F'^{ij} = \epsilon^{ij}{}_k B^k. \tag{L.2.36}$$

Um die Komponenten B^n des magnetischen Feldes zu bekommen, multiplizieren wir beide Seiten mit $\epsilon_{ij}{}^n$ und erhalten mit der Beziehung $\epsilon_{ij}{}^n \epsilon^{ij}{}_k = 2\delta_k^n$ den Ausdruck

$$\begin{aligned}
 2B'^n &= \gamma (E^i \beta^j - \beta^i E^j) \epsilon_{ij}{}^n + 2B^n \\
 &\quad + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \left[\epsilon^{im}{}_k \beta^j \beta_m + \epsilon^{mj}{}_k \beta^i \beta_m \right] \epsilon_{ij}{}^n B^k. \tag{L.2.37}
 \end{aligned}$$

Nutzen wir aus, dass

$$\begin{aligned}
 \epsilon^{im}{}_k \epsilon_{ij}{}^n &= \begin{vmatrix} \delta_j^m & \delta^{mn} \\ \delta_{kj} & \delta_k^n \end{vmatrix} = \delta_j^m \delta_k^n - \delta_{kj} \delta^{mn} \quad \text{und} \\
 \epsilon^{mj}{}_k \epsilon_{ij}{}^n &= \epsilon^{jm}{}_k \epsilon_{ji}{}^n = \begin{vmatrix} \delta_i^m & \delta^{mn} \\ \delta_{ki} & \delta_k^n \end{vmatrix} = \delta_i^m \delta_k^n - \delta_{ki} \delta^{mn},
 \end{aligned}$$

so können wir (L.2.37) schreiben als

$$\begin{aligned}
 2B'^n &= 2\gamma (\mathbf{E} \times \boldsymbol{\beta})^n + 2B^n + 2\frac{\gamma^2}{\gamma+1} [\beta^2 B^n - (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B}) \beta^n] \\
 &= -2\gamma (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E})^n + 2\gamma B^n - 2\frac{\gamma^2}{\gamma+1} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B}) \beta^n. \tag{L.2.38}
 \end{aligned}$$

Aus (L.2.38) folgt unmittelbar die geforderte Beziehung

$$\mathbf{B}' = \gamma(\mathbf{B} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B}). \tag{L.2.39}$$

Kap. 8 Visuelle Effekte bei hohen Geschwindigkeiten

8.1 Dopplerverschiebung von Spektrallinien

Wir verwenden hier die Relation (8.17) für den longitudinalen Dopplereffekt bei Bewegung von der Quelle weg. Aufgrund der hier zu erwartenden großen nötigen Geschwindigkeit können wir nicht den genäherten Ausdruck verwenden. Es folgt die Bedingung

$$\frac{\omega_{\text{Ba}-\alpha}}{\omega_{\text{Ly}-\alpha}} = \frac{\lambda_{\text{Ly}-\alpha}}{\lambda_{\text{Ba}-\alpha}} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}, \quad (\text{L.2.40})$$

also

$$\beta = \frac{\lambda_{\text{Ba}-\alpha} - \lambda_{\text{Ly}-\alpha}}{\lambda_{\text{Ba}-\alpha} + \lambda_{\text{Ly}-\alpha}} = 0,6874. \quad (\text{L.2.41})$$

3 Allgemeine Relativitätstheorie

Kap. 10 Äquivalenzprinzip als Basis der ART

10.1 Inhomogene Gravitationsfelder

Nach dem Newton'schen Gravitationsgesetz gilt für eine Punktmasse m im Gravitationsfeld einer Masse M die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GMm}{r^3}\mathbf{r}, \quad (\text{L.3.1})$$

siehe (1.15). Für die beiden Punktmassen an den Orten \mathbf{r} und $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r} + \boldsymbol{\xi}$ gilt demnach

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM}{r^3}\mathbf{r} \quad \text{und} \quad \ddot{\mathbf{r}} + \ddot{\boldsymbol{\xi}} = -\frac{GM}{|\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi}|^3}(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi}). \quad (\text{L.3.2})$$

- a) Schreiben wir $\boldsymbol{\xi} = \xi\mathbf{n}$ mit $|\mathbf{n}| = 1$ und $\xi \ll 1$, so können wir für jede Komponente der Vektoren $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ und $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ eine Taylor-Entwicklung von (L.3.2) durchführen. Für die Entwicklung in linearer Näherung der Funktion $f_i(\xi)$ um $\xi = 0$ gilt

$$f_i(\xi) = f_i(0) + \left. \frac{df_i}{d\xi} \right|_{\xi=0} \xi + \mathcal{O}(\xi^2). \quad (\text{L.3.3})$$

In unserem Fall erhalten wir

$$\begin{aligned} f_i(\xi) &= \frac{x_i}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} + \left(\frac{n_i}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} - \frac{3x_i(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{5/2}} \right) \xi \\ &= \frac{x_i + \xi n_i/2}{r^3} - \frac{3x_i(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{r})}{2r^5}. \end{aligned} \quad (\text{L.3.4})$$

In vektorieller Notation gilt dann

$$\ddot{\mathbf{r}} + \ddot{\boldsymbol{\xi}} = -GM \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} + \frac{\boldsymbol{\xi}}{r^3} - \frac{3(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{r})}{r^5} \mathbf{r} \right). \quad (\text{L.3.5})$$

Ziehen wir davon die linke Gleichung von (L.3.2) ab und ersetzen $2GM/c^2 = r_s$, so folgt schließlich

$$\ddot{\boldsymbol{\xi}} = -\frac{c^2 r_s}{2} \frac{\boldsymbol{\xi}}{r^3} + \frac{3r_s}{2} \frac{(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{r})}{r^5} \mathbf{r}. \quad (\text{L.3.6})$$

Ist $\xi = \xi r/r$ rein radial, so reduziert sich (L.3.6) auf die herzuleitende Gleichung (10.16),

$$\ddot{\xi} = c^2 \frac{r_s}{r^3} \xi. \quad (\text{L.3.7})$$

- b) Die Gleichung (L.3.7) stellt für ξ eine gewöhnliche Differentialgleichung dar, deren allgemeine Lösung

$$\xi = \alpha \sinh(\omega\tau) + \beta \cosh(\omega\tau) \quad (\text{L.3.8})$$

lautet. Hier ist $\omega^2 := c^2 r_s / r^3$ und die freien Parameter α und β ergeben sich aus den Anfangsbedingungen $\xi(0) = \xi_0 = \beta$ und $\dot{\xi}(0) = 0 = \alpha$. Entwickeln wir die Lösung für kleine Zeiten $t \ll 0$, so folgt

$$\xi(t) = \xi_0 \cosh(\omega t) \approx \xi_0 \left(1 + \frac{1}{2} \omega^2 t^2 \right). \quad (\text{L.3.9})$$

Während einer kleinen Beobachtungszeit Δt hat sich der Abstand ξ damit um

$$\Delta\xi = \xi(t) - \xi_0 = \frac{1}{2} \xi_0 \omega^2 \Delta t^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{r_s}{r} \right)^3 \left(\frac{c\Delta t}{r_s} \right)^2 \xi_0 \quad (\text{L.3.10})$$

vergrößert.

- c) Mit dem Radius der Erde $r_{\text{g}} = 6,378 \cdot 10^6$ m und ihrem Schwarzschildradius $r_{s\text{g}} = 8,9 \cdot 10^{-3}$ m aus Tab. 1.1, der Lichtgeschwindigkeit $c = 299.792.458$ m/s und dem Anfangsabstand $\xi_0 = 100$ m, erhalten wir

$$\Delta\xi(\Delta t = 1 \text{ s}) \approx 0,154 \text{ mm} \quad \text{und} \quad \Delta\xi(\Delta t = 100 \text{ s}) \approx 1,54 \text{ m}. \quad (\text{L.3.11})$$

10.2 Lichtablenkung im konstant fallenden Labor

Die Höhe des im Schwerfeld frei fallenden Labors über dem Erdboden vermindert sich nach dem Fallgesetz um $\Delta h = h_0 - gt^2/2$. Denkt man sich die Bahn des Lichtstrahls parametrisiert durch die Zeit t , so bewegt sich der Lichtstrahl daher von außen betrachtet auf einer *Parabel*. Beim Labor, das sich mit konstanter Geschwindigkeit v nach unten bewegt, vermindert sich die Höhe dagegen gemäß $\Delta h = h_0 - vt$. Von außen betrachtet bewegt sich der Lichtstrahl daher auf einer *Geraden*, und nicht auf einer gekrümmten Bahn.

Kap. 11 Riemann'sche Geometrie

11.1 Bestimmung der Übergangskoeffizienten

Der besseren Übersicht halber schreiben wir die Übergangskoeffizienten aus (11.63) nochmal hin,

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (g_{\sigma\mu,\nu} + g_{\sigma\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}).$$

Diese sollen nun die Bestimmungsgleichung (11.62) erfüllen. Direktes Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned}
& g_{\mu\nu,\beta} - g_{\alpha\nu}\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} - g_{\mu\alpha}\Gamma_{\nu\beta}^{\alpha} \\
&= g_{\mu\nu,\beta} - g_{\alpha\nu}\frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}(g_{\sigma\mu,\beta} + g_{\sigma\beta,\mu} - g_{\mu\beta,\sigma}) - g_{\mu\alpha}\frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}(g_{\sigma\nu,\beta} + g_{\sigma\beta,\nu} - g_{\nu\beta,\sigma}) \\
&= g_{\mu\nu,\beta} - \frac{1}{2}(g_{\nu\mu,\beta} + g_{\nu\beta,\mu} - g_{\mu\beta,\nu}) - \frac{1}{2}(g_{\mu\nu,\beta} + g_{\mu\beta,\nu} - g_{\nu\beta,\mu}) \\
&= -\frac{1}{2}(g_{\nu\beta,\mu} - g_{\mu\beta,\nu} + g_{\mu\beta,\nu} - g_{\nu\beta,\mu}) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

was zu zeigen war.

11.2 Kreisbahn in der SRT

Für die Bewegung entlang einer Kreisbahn im Rahmen der SRT haben wir folgende Beziehungen für die Bahn x^μ , die Geschwindigkeit u^μ und die Beschleunigung b^μ erhalten,

$$x^\mu(\tau) = \begin{pmatrix} c\gamma\tau \\ R \cos(\omega\tau) \\ R \sin(\omega\tau) \end{pmatrix}, \quad u^\mu(\tau) = \begin{pmatrix} c\gamma \\ -R\omega \sin(\omega\tau) \\ R\omega \cos(\omega\tau) \end{pmatrix}, \quad b^\mu(\tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ -R\omega^2 \cos(\omega\tau) \\ -R\omega^2 \sin(\omega\tau) \end{pmatrix},$$

siehe Abschn. 6.8. Weiterhin gilt die Beziehung

$$\omega = \frac{c\gamma\beta}{R}. \quad (\text{L.3.12})$$

Aus der Gleichung (11.139) für den Fermi-Walker Transport,

$$\frac{dF^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma}u^\rho F^\sigma + \frac{1}{c^2}(u^\sigma a^\mu - u^\mu a^\sigma)g_{\rho\sigma}F^\rho = 0,$$

wobei hier $a^\mu = b^\mu$ ist und die Christoffel-Symbole der Minkowski-Metrik identisch verschwinden, erhalten wir die folgenden drei gekoppelten Differentialgleichungen für einen Vektor $\underline{F} = (F^0, F^1, F^2, 0)$,

$$0 = \frac{dF^0}{d\tau} - \frac{1}{c^2}u^0(b^1F^1 + b^2F^2), \quad (\text{L.3.13a})$$

$$0 = \frac{dF^1}{d\tau} + \frac{1}{c^2}(-u^0F^0 + u^1F^1 + u^2F^2)b^1 - \frac{1}{c^2}u^1(b^1F^1 + b^2F^2), \quad (\text{L.3.13b})$$

$$0 = \frac{dF^2}{d\tau} + \frac{1}{c^2}(-u^0F^0 + u^1F^1 + u^2F^2)b^2 - \frac{1}{c^2}u^2(b^1F^1 + b^2F^2). \quad (\text{L.3.13c})$$

Fassen wir hier die Koeffizienten vor den Komponenten F^1 und F^2 zusammen und ersetzen Ausdrücke der Form $u^i b^j - u^j b^i$ durch ihre jeweiligen Einträge, so können wir das System (L.3.13) umschreiben in

$$0 = \frac{dF^0}{d\tau} - \frac{1}{c^2} u^0 (b^1 F^1 + b^2 F^2), \quad (\text{L.3.14a})$$

$$0 = \frac{dF^1}{d\tau} - \frac{1}{c^2} u^0 F^0 b^1 - \frac{R^2 \omega^3}{c^2} F^2, \quad (\text{L.3.14b})$$

$$0 = \frac{dF^2}{d\tau} - \frac{1}{c^2} u^0 F^0 b^2 + \frac{R^2 \omega^3}{c^2} F^1. \quad (\text{L.3.14c})$$

Der nächste Schritt ist nicht ganz offensichtlich. Wir konstruieren uns eine Hilfsfunktion $G = b^1 F^1 + b^2 F^2$ als Linearkombination der beiden Komponenten F^1 und F^2 . Die erste Ableitung von G nach τ liefert dann zunächst

$$\frac{dG}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} (b^1 F^1 + b^2 F^2) = \frac{db^1}{d\tau} F^1 + b^1 \frac{dF^1}{d\tau} + \frac{db^2}{d\tau} F^2 + b^2 \frac{dF^2}{d\tau}. \quad (\text{L.3.15})$$

Berücksichtigen wir die beiden Relationen

$$\frac{db^1}{d\tau} = R\omega^3 \sin(\omega\tau) = -\omega b^2 \quad \text{und} \quad \frac{db^2}{d\tau} = -R\omega^3 \cos(\omega\tau) = \omega b^1, \quad (\text{L.3.16})$$

und verwenden wir die Ableitungen aus (L.3.14), so folgt aus (L.3.15) weiter

$$\begin{aligned} \frac{dG}{d\tau} &= -\omega b^2 F^1 + b^1 \left(\frac{u^0}{c} F^0 b^1 + \frac{R^2 \omega^3}{c^2} F^2 \right) + \omega b^1 F^2 + b^2 \left(\frac{u^0}{c^2} F^0 b^2 - \frac{R^2 \omega^3}{c^2} F^1 \right) \\ &= \left(-\omega - \frac{R^2 \omega^3}{c^2} \right) b^2 F^1 + \frac{u^0}{c^2} F^0 ((b^1)^2 + (b^2)^2) + \left(\omega + \frac{R^2 \omega^3}{c^2} \right) b^1 F^2 \\ &= -\omega \gamma^2 b^2 F^1 + \omega \gamma^2 b^1 F^2 + \frac{\gamma}{c} R^2 \omega^4 F^0. \end{aligned} \quad (\text{L.3.17})$$

Im letzten Schritt haben wir die Beziehung (L.3.12) und $1 + \gamma^2 \beta^2 = \gamma^2$ ausgenutzt. Differenzieren wir G ein weiteres Mal, so erhalten wir

$$\frac{d^2 G}{d\tau^2} = -\omega \gamma^2 \left[\frac{db^2}{d\tau} F^1 + b^2 \frac{dF^1}{d\tau} - \frac{db^1}{d\tau} F^2 - b^1 \frac{dF^2}{d\tau} - \frac{R^2 \omega^3}{\gamma c} \frac{dF^0}{d\tau} \right]. \quad (\text{L.3.18})$$

Analog zur ersten Ableitung von G ersetzen wir die Ableitungen auf der rechten Seite durch die Relationen (L.3.16) und die Ableitungen aus (L.3.14). Nach etwas Ausmultiplizieren und Kürzen vereinfacht sich die zweite Ableitung von G zu

$$\frac{d^2 G}{d\tau^2} = -\omega^2 \gamma^2 (b^1 F^1 + b^2 F^2) = -\omega^2 \gamma^2 G. \quad (\text{L.3.19})$$

Das erste Etappenziel ist hiermit erreicht. Wir haben eine Differenzialgleichung für die Hilfsfunktion G hergeleitet, deren allgemeine Lösung wohlbekannt ist. Mit den zwei freien Parametern \mathfrak{A} und \mathfrak{B} lautet die Lösung

$$G(\tau) = \mathfrak{A} \sin(\omega\gamma\tau) + \mathfrak{B} \cos(\omega\gamma\tau). \quad (\text{L.3.20})$$

Setzen wir diese in (L.3.14a) ein und integrieren, so erhalten wir für die nullte Komponente des Vektors \underline{F} das Resultat

$$F^0 = -\frac{\mathfrak{A}}{\omega c} \cos(\omega\gamma\tau) + \frac{\mathfrak{B}}{\omega c} \sin(\omega\gamma\tau). \quad (\text{L.3.21})$$

Zur Bestimmung der Komponente F^2 lösen wir die Hilfsfunktion G nach F^1 auf und setzen den resultierenden Ausdruck in die erste Ableitung von G ein,

$$\begin{aligned} \frac{dG}{d\tau} &= -\omega\gamma^2 b^2 \frac{G - b^2 F^2}{b^1} + \omega\gamma^2 b^1 F^2 + \frac{\gamma}{c} R^2 \omega^4 F^0 \\ &= -\omega\gamma^2 \frac{b^2}{b^1} G + \frac{\omega\gamma^2 R^2 \omega^4}{b^1} F^2 + \frac{\gamma}{c} R^2 \omega^4 F^0. \end{aligned}$$

Auflösen nach F^2 liefert

$$\begin{aligned} \frac{\omega\gamma^2 R^2 \omega^4}{b^1} F^2 &= \omega\gamma^2 \frac{b^2}{b^1} G - \frac{\gamma}{c} R^2 \omega^4 F^0 + \frac{dG}{d\tau} \\ \Rightarrow F^2 &= \frac{b^2}{R^2 \omega^4} G - b^1 F^0 \left(\frac{1}{c\omega\gamma} + \frac{c}{\gamma R^2 \omega^3} \right) \\ &= \frac{b^2}{R^2 \omega^4} G - \frac{b^1}{R\omega^2 \beta} F^0. \end{aligned} \quad (\text{L.3.22})$$

Hierbei haben wir die erste Ableitung von G wie folgt ersetzt:

$$\begin{aligned} \frac{dG}{d\tau} &= \mathfrak{A}\omega\gamma \cos(\omega\gamma\tau) - \mathfrak{B}\omega\gamma \sin(\omega\gamma\tau) \\ &= -c\omega^2 \gamma \left(-\frac{\mathfrak{A}}{\omega c} \cos(\omega\gamma\tau) + \frac{\mathfrak{B}}{\omega c} \sin(\omega\gamma\tau) \right) = -c\omega^2 \gamma F^0. \end{aligned}$$

Setzen wir nun noch den Ausdruck für F^0 (L.3.21) und für G (L.3.20) in (L.3.22) ein, so erhalten wir als Resultat

$$F^2 = -\frac{\sin(\omega\tau)}{c\gamma\beta\omega} (\mathfrak{A} \sin(\omega\gamma\tau) + \mathfrak{B} \cos(\omega\gamma\tau)) + \frac{\cos(\omega\tau)}{c\beta\omega} (-\mathfrak{A} \cos(\omega\gamma\tau) + \mathfrak{B} \sin(\omega\gamma\tau)). \quad (\text{L.3.23})$$

Eine analoge Rechnung liefert für F^1 schließlich

$$F^1 = -\frac{\cos(\omega\tau)}{c\gamma\beta\omega} (\mathfrak{A} \sin(\omega\gamma\tau) + \mathfrak{B} \cos(\omega\gamma\tau)) - \frac{\sin(\omega\tau)}{c\beta\omega} (-\mathfrak{A} \cos(\omega\gamma\tau) + \mathfrak{B} \sin(\omega\gamma\tau)). \quad (\text{L.3.24})$$

Zum Schluss bleibt noch die Aufgabe, die freien Parameter festzulegen. Für die Startzeit $\tau = 0$ folgt für die einzelnen Komponenten

$$F^0(0) = -\frac{\mathfrak{A}}{\omega c}, \quad F^1(0) = -\frac{\mathfrak{B}}{c\gamma\beta\omega}, \quad F^2(0) = -\frac{\mathfrak{A}}{c\beta\omega}. \quad (\text{L.3.25})$$

Bilden wir das Quadrat von \underline{F} , so erhalten wir

$$\underline{F}^2 = F_\mu F^\mu = -(F^0)^2 + (F^1)^2 + (F^2)^2 = \frac{1}{c^2\omega^2\gamma^2\beta^2} (-\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2). \quad (\text{L.3.26})$$

Im Fall eines lichtartigen Vektors, $\underline{F}^2 = 0$, können wir $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = 1$ wählen.

Wenn wir herausfinden wollen, um wieviel sich ein Vektor während eines vollen Umlaufs dreht, benötigen wir zunächst eine lokale Tetrade, bezüglich der wir die Orientierung des Vektors messen können. Dafür eignet sich gerade die lokale Tetrade, bei der $\underline{e}_{(0)} = \underline{u}(\tau = 0)/c = (\gamma, 0, \gamma\beta, 0)$ ist. Die beiden anderen hier relevanten Tetradenvektoren lauten dann $\underline{e}_{(1)} = (0, 1, 0, 0)$ und $\underline{e}_{(2)} = (\gamma\beta, 0, \gamma, 0)$. Betrachten wir nun den raumartigen Vektor $\underline{F} = \underline{e}_{(1)}$, so lautet dessen Koordinatendarstellung $F^\mu(\tau = 0) = (0, 1, 0, 0)$, und nach einem vollen Umlauf, $\tau_{2\pi} = 2\pi/\omega$, erhalten wir

$$F^0(\tau_{2\pi}) = -\gamma\beta \sin(2\pi\gamma), \quad F^1(\tau_{2\pi}) = \cos(2\pi\gamma), \quad F^2(\tau_{2\pi}) = -\gamma \sin(2\pi\gamma). \quad (\text{L.3.27})$$

Transformieren wir anschließend den transportierten Vektor mit der Beziehung $F^\mu = F^{(0)}e_{(0)}^\mu + F^{(1)}e_{(1)}^\mu + F^{(2)}e_{(2)}^\mu$ wieder zurück in die lokale Tetrade, so folgt für die Komponenten: $F^{(0)} = 0$, $F^{(1)} = \cos(2\pi\gamma)$ und $F^{(2)} = -\sin(2\pi\gamma)$. Der Vektor hat sich also um einen Winkel $\varphi = 2\pi(1 - \gamma)$ gegenüber seiner Ausgangslage verdreht. Er dreht sich daher mit einer Winkelgeschwindigkeit Ω von

$$\Omega = \frac{\varphi}{\tau_{2\pi}} = \omega(1 - \gamma). \quad (\text{L.3.28})$$

Dies entspricht, bis auf einen zusätzlichen Faktor γ , dem Wert der Thomas-Präzession. Der Faktor γ fehlt hier, da wir die Winkelgeschwindigkeit bezogen auf die Eigenzeit τ und nicht auf die Koordinatenzeit $t = \gamma\tau$ beziehen.

11.3 Beschleunigung in der Schwarzschild-Raumzeit

Die notwendige Beschleunigung, um in der Schwarzschild-Raumzeit an einem Ort zu bleiben, folgt aus der Vierer-Beschleunigung (11.140) und dem Ansatz $\underline{u} = (u^t, 0, 0, 0)^T$ für die Vierer-Geschwindigkeit. Aus der Normierungsbedingung (11.134) für eine zeitartige Bahn, folgt sofort

$$-c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) (u^t)^2 = -c^2 \quad \Rightarrow \quad u^t = \frac{1}{\sqrt{1 - r_s/r}}. \quad (\text{L.3.29})$$

Betrachtet man die Christoffelsymbole für den allgemeinen Fall

$$\begin{aligned}\Gamma^r_{tt} &= \frac{c^2 r_s (r - r_s)}{2r^3}, & \Gamma^t_{tr} &= \frac{r_s}{2r(r - r_s)}, & \Gamma^r_{rr} &= -\frac{r_s}{2r(r - r_s)}, \\ \Gamma^\vartheta_{r\vartheta} &= \frac{1}{r}, & \Gamma^\varphi_{r\varphi} &= \frac{1}{r}, & \Gamma^r_{\vartheta\vartheta} &= -(r - r_s), \\ \Gamma^\varphi_{\vartheta\varphi} &= \cot \vartheta, & \Gamma^r_{\varphi\varphi} &= -(r - r_s) \sin^2 \vartheta, & \Gamma^\vartheta_{\varphi\varphi} &= -\sin \vartheta \cos \vartheta,\end{aligned}\tag{L.3.30}$$

so erkennt man, dass nur die radiale Beschleunigung a^r einen nicht-verschwindenden Beitrag besitzt. So folgt schließlich die gesuchte Beschleunigung

$$a^r = \Gamma^r_{tt} u^t u^t = \frac{c^2}{2r_s} \left(\frac{r_s}{r} \right)^2.\tag{L.3.31}$$

Um die Beschleunigung $a^{(r)}$ zu bestimmen, die ein lokaler Beobachter an dem Punkt tatsächlich aufbringen muss, ist (L.3.31) noch in die lokale Tetrade (13.37) zu transformieren, die wir aber erst in Abschnitt 13.2.7 kennenlernen werden. Mit Hilfe der Beziehung (13.38) und dem dualen Tetradenvektor $\theta_r^{(r)} = 1/\sqrt{1 - r_s/r}$ folgt

$$a^{(r)} = \frac{c^2}{2r_s} \frac{1}{\sqrt{1 - r_s/r}} \left(\frac{r_s}{r} \right)^2.\tag{L.3.32}$$

Im Grenzfall $r \rightarrow r_s$ strebt $a^{(r)} \rightarrow \infty$. Die notwendige Beschleunigung, um am gleichen Ort zu bleiben, divergiert, je näher man sich dem Schwarzen Loch nähert. Direkt auf dem Horizont ($r = r_s$) gibt es keinen statischen Beobachter mehr.

Betrachten wir den Grenzfall kleiner Massen, $r_s \rightarrow 0$, so folgt aus (L.3.32) der Newton'sche Fall

$$a^{(r)} \approx \frac{c^2}{2r^2} r_s = \frac{GM}{r^2},\tag{L.3.33}$$

wobei wir den Schwarzschild-Radius $r_s = 2GM/c^2$ gesetzt haben, siehe auch (1.38).

Kap. 13 Schwarzschild-Metrik

13.1 Dopplereffekt beim Pound-Rebka-Experiment

Aus Gleichung (13.85) wissen wir, dass ungefähr $\Delta\nu/\nu_{\text{em}} \cong -3 \cdot 10^{-15}$ gilt. Weiter ist nach Gleichung (8.16) $\Delta\omega/\omega_{\text{em}} \approx \beta$. Wenn wir beide Resultate gleichsetzen führt das auf $\beta \cong -3 \cdot 10^{-15}$ und damit auf $v = \beta c \cong 9 \times 10^{-7} \text{ms}^{-1}$, also die erwartete Größenordnung.

13.2 Zeitdifferenzen bei GPS

Zur Berechnung der speziell-relativistischen Zeitdifferenz benötigen wir den Zusammenhang $c\Delta\tau = c\Delta t/\gamma$ in Gleichung (4.7). Wir überprüfen zuerst die im Buch angegebene Bahngeschwindigkeit der GPS-Satelliten von $v = 3\text{-}4 \text{ km s}^{-1}$. Aus der Bedingung, dass die Gravitationsbeschleunigung gleich der Zentripetalbeschleunigung sein soll, ergibt sich

$$v_{\text{GPS}} = \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{r_{\oplus} + h}} = 3873 \text{ ms}^{-1}, \quad (\text{L.3.34})$$

mit der Flughöhe der Satelliten $h = 20.200 \text{ km}$. Aus Gleichung (4.7) ergibt sich dann mit $\Delta t = 24 \cdot 3600 \text{ s}$ die Zeitdifferenz

$$\Delta\tau - \Delta t = 24 \cdot 3600 \text{ s} [1/\gamma(\beta_{\text{GPS}}) - 1] = -7,2 \text{ }\mu\text{s}, \quad (\text{L.3.35})$$

wobei $1/\gamma(\beta_{\text{GPS}}) = 1 - 8,3 \cdot 10^{-11}$. Der Lorentz-Faktor für die GPS-Satelliten ist also winzig. Streng genommen müssten wir auch die Geschwindigkeit auf der Erdoberfläche aufgrund der Erdrotation berücksichtigen. Wegen $v_{\oplus} \approx 2\pi r_{\oplus}/(24 \cdot 3600) \text{ s} = 464 \text{ ms}^{-1}$ ist aber $1/\gamma(\beta_{\oplus}) = 1 - 1,2 \cdot 10^{-18}$ und daher vernachlässigbar klein gegenüber dem Wert für die GPS-Satelliten.

Bei der Bestimmung der gravitativen Zeitverschiebung müssen wir dagegen sowohl die Laufzeitverzögerung auf der Erdoberfläche als auch die bei den Satelliten berücksichtigen. Aus $\Delta\tau = \sqrt{1 - r_s/r}\Delta t$ in Gleichung (13.27) folgt dann

$$\Delta t - \Delta\tau = 24 \cdot 3600 \text{ s} \left(1 - \frac{\sqrt{1 - \frac{r_s}{r_{\oplus}}}}{\sqrt{1 - \frac{r_s}{r_{\oplus} + h}}} \right) = 45,7 \text{ }\mu\text{s}. \quad (\text{L.3.36})$$

13.4 Geschwindigkeit des frei fallenden Beobachters

In Abschnitt (13.3.1) haben wir aus der Euler-Lagrange Gleichung (13.47) für den freien radialen Fall in der Schwarzschild Raumzeit die beiden Differentialgleichungen (13.52a) und (13.52b) erhalten. Diese beiden Gleichungen können auch als die Komponenten u^r und u^t der Vierergeschwindigkeit $\underline{u} = u^\mu \partial_\mu$ interpretiert werden,

$$u^t = \frac{k}{c^2} \left(1 - \frac{r_s}{r} \right)^{-1}, \quad u^r = -\sqrt{\frac{k^2}{c^2} - c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r} \right)}, \quad (\text{L.3.37})$$

wobei hier das negative Vorzeichen zu wählen ist, da es sich um eine Bewegung radial nach innen handelt. Um die Vierergeschwindigkeit bezogen auf die lokale Tetrade (13.37) ausdrücken zu können, benötigen wir deren duale Tetrade. Mit den Komponenten $\theta_t^{(t)} = c\sqrt{1 - r_s/r}$ und $\theta_r^{(r)} = 1/\sqrt{1 - r_s/r}$ folgt für die Komponenten der

Vierergeschwindigkeit

$$\underline{\mathbf{u}} = \frac{k}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - r_s/r}} \underline{\mathbf{e}}_{(t)} - \frac{1}{\sqrt{1 - r_s/r}} \sqrt{\frac{k^2}{c^2} - c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)} \underline{\mathbf{e}}_{(r)}. \quad (\text{L.3.38})$$

In Gleichung (L.3.38) kann man einen gemeinsamen Vorfaktor herausziehen und erhält somit

$$\underline{\mathbf{u}} = \frac{k}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - r_s/r}} \left(\underline{\mathbf{e}}_{(t)} - \sqrt{1 - \frac{c^4(1 - r_s/r)}{k^2}} \underline{\mathbf{e}}_{(r)} \right). \quad (\text{L.3.39})$$

Setzt man den Wurzelausdruck gleich β , so zeigt eine kurze Rechnung, dass der Vorfaktor gerade $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ entspricht. Wir können (L.3.39) also auch wie folgt schreiben,

$$\underline{\mathbf{u}} = \gamma \left(\underline{\mathbf{e}}_{(t)} + \beta \underline{\mathbf{e}}_{(r)} \right), \quad (\text{L.3.40})$$

und erhalten so die gesuchte lokale Geschwindigkeit β .

Um noch die Konstante der Bewegung k zu eliminieren, müssen wir eine Anfangsgeschwindigkeit des frei fallenden Beobachters angeben. Setzen wir diese zu Null, so folgt aus (L.3.37)

$$u^r = 0 \quad \Rightarrow \quad k = c^2 \sqrt{1 - \frac{r_s}{r_0}} \quad (\text{L.3.41})$$

mit dem Anfangsort r_0 . Ein statischer Beobachter am Ort r misst also die lokale Geschwindigkeit

$$\beta = -\sqrt{1 - \frac{1 - r_s/r}{1 - r_s/r_0}}. \quad (\text{L.3.42})$$

Man beachte hierbei, dass der Beobachter nur für $r > r_s$ statisch sein kann. Der Grenzfall $r \rightarrow r_s$ ist daher nicht zulässig. Dennoch kann man sagen, dass die Geschwindigkeit beim Überqueren des Horizonts immer sehr nahe der Lichtgeschwindigkeit kommt. Eine detaillierte Diskussion findet man in Ref. T. Müller, Gen. Rel. Grav. **40**, 2185–2199 (2008).

13.4 Geodätische Präzession

Die Berechnung der geodätischen Präzession entlang eines zeitartigen kreisförmigen Orbits um ein Schwarzschild-Schwarzes-Loch basiert auf dem Fermi-Walker Transport eines Vektors $\underline{\mathbf{F}} = F^\mu \partial_\mu$, siehe Gl. (11.139). Hierzu benötigen wir zunächst die Parametrisierung der zugrunde liegenden Kreisbahn $x^\mu(\tau)$ in Abhängigkeit von der Eigenzeit τ und der Kreisfrequenz ω ,

$$x^\mu(\tau) = (ct(\tau), r, \pi/2, \omega\tau). \quad (\text{L.3.43})$$

Zur Bestimmung der Koordinatenzeit $t(\tau)$ bestimmen wir zunächst die Vierergeschwindigkeit $\underline{u} = u^\mu \partial_\mu$ für die gilt

$$-c^2 = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = g_{tt} u^t u^t + g_{\varphi\varphi} u^\varphi u^\varphi = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 (u^t)^2 + r^2 \omega^2. \quad (\text{L.3.44})$$

Mit $u^t = dt/d\tau$ erhalten wir

$$u^t = \sqrt{\frac{r^2 \omega^2 / c^2 + 1}{1 - r_s / r}} \quad \text{und} \quad t = \sqrt{\frac{r^2 \omega^2 / c^2 + 1}{1 - r_s / r}} \tau. \quad (\text{L.3.45})$$

Weiterhin benötigen wir die Viererbeschleunigung $a^\mu(\tau)$ die notwendig ist, damit ein Objekt auf der beliebigen zeitartigen Kreisbahn (L.3.43) bleibt. Betrachten wir Gl. (11.140) für die Viererbeschleunigung mit den Christoffelsymbolen aus (L.3.30), so stellen wir schnell fest, dass nur die Radialkomponente von Null verschieden ist. Für diese gilt

$$a^r = \Gamma^r_{tt} u^t u^t + \Gamma^r_{\varphi\varphi} u^\varphi u^\varphi = \frac{3}{2} r_s \omega^2 + \frac{c^2 r_s}{2r^2} r \omega^2. \quad (\text{L.3.46})$$

Nun können wir uns der eigentlichen Fermi-Walker Transportgleichung (11.139) widmen:

$$\frac{dF^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma} u^\rho F^\sigma + \frac{1}{c^2} (u^\sigma a^\mu - u^\mu a^\sigma) g_{\rho\sigma} F^\rho = 0.$$

Berücksichtigen wir, dass die r - und ϑ -Komponenten der Vierergeschwindigkeit \underline{u} sowie die t -, ϑ - und φ -Komponenten der Viererbeschleunigung verschwinden, so erhalten wir die folgenden drei gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$0 = \frac{dF^t}{d\tau} + \Gamma^t_{tr} u^t F^r - \frac{1}{c^2} u^t a^r g_{rr} F^r, \quad (\text{L.3.47a})$$

$$0 = \frac{dF^r}{d\tau} + \Gamma^r_{tt} u^t F^t + \Gamma^r_{\varphi\varphi} u^\varphi F^\varphi + \frac{1}{c^2} a^r (u^t g_{tt} F^t + u^\varphi g_{\varphi\varphi} F^\varphi), \quad (\text{L.3.47b})$$

$$0 = \frac{dF^\varphi}{d\tau} + \Gamma^\varphi_{\varphi r} u^r F^r - \frac{1}{c^2} u^\varphi a^r g_{rr} F^r. \quad (\text{L.3.47c})$$

Der besseren Übersicht halber fassen wir die Koeffizienten vor den Komponenten des Vierervektors \underline{F} zusammen:

$$0 = \frac{dF^t}{d\tau} + \mathcal{A}F^r, \quad (\text{L.3.48a})$$

$$0 = \frac{dF^r}{d\tau} + \mathcal{B}F^t + \mathcal{C}F^\varphi, \quad (\text{L.3.48b})$$

$$0 = \frac{dF^\varphi}{d\tau} + \mathcal{E}F^r. \quad (\text{L.3.48c})$$

Zur Integration dieses gekoppelten Differentialgleichungssystem bedienen wir uns folgenden Tricks. Differenzieren wir (L.3.48b) nach τ , so können wir in dem daraus entstehenden Ausdruck die Ableitungen der t - und der φ -Komponenten durch (L.3.48a) und (L.3.48c) ersetzen, und wir erhalten

$$\frac{d^2 F^r}{d\tau^2} - (\mathcal{B}\mathcal{A} + \mathcal{C}\mathcal{E}) F^r = 0. \quad (\text{L.3.49})$$

Für $\mathcal{B}\mathcal{A} + \mathcal{C}\mathcal{E} = -\Omega^2$ stellt (L.3.49) eine Schwingungsgleichung für die Radialkomponente F^r dar, deren Lösung wir sofort hinschreiben können. Aus (L.3.48a) und (L.3.48c) erhalten wir auch gleich die Lösungen für die beiden anderen Komponenten des Vierervektors. So folgt

$$F^t(\tau) = \frac{p\mathcal{A}}{\Omega} \cos(\Omega\tau) - \frac{q\mathcal{A}}{\Omega} \sin(\Omega\tau), \quad (\text{L.3.50a})$$

$$F^r(\tau) = p \sin(\Omega\tau) + q \cos(\Omega\tau), \quad (\text{L.3.50b})$$

$$F^\varphi(\tau) = \frac{p\mathcal{E}}{\Omega} \cos(\Omega\tau) - \frac{q\mathcal{E}}{\Omega} \sin(\Omega\tau). \quad (\text{L.3.50c})$$

Die beiden freien Parameter p und q legen die Anfangsorientierung des Vierervektors $\underline{\mathbf{F}}$ fest. Welche Werte wir hierfür verwenden, ist unerheblich. Zur Bestimmung der geodätischen Präzession benötigen wir „nur“ die Winkelgeschwindigkeit Ω , die wir jetzt noch bestimmen müssen.

Vergleichen wir (L.3.47) mit der verkürzten Darstellung (L.3.48), so können wir unmittelbar die Koeffizienten \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} und \mathcal{E} ablesen,

$$\mathcal{A} = \Gamma^t_{tr} u^t - \frac{1}{c^2} u^t a^r g_{rr}, \quad \mathcal{B} = \Gamma^r_{tt} u^t + \frac{1}{c^2} u^t a^r g_{tt}, \quad (\text{L.3.51a})$$

$$\mathcal{C} = \Gamma^r_{\varphi\varphi} u^\varphi + \frac{1}{c^2} u^\varphi a^r g_{\varphi\varphi}, \quad \mathcal{E} = \Gamma^\varphi_{\varphi r} u^\varphi - \frac{1}{c^2} u^\varphi a^r g_{rr}. \quad (\text{L.3.51b})$$

Die etwas längliche Rechnung zur Bestimmung von Ω können wir etwas vereinfachen, indem wir zunächst die Komponenten der Vierergeschwindigkeit ausklammern,

$$\begin{aligned} -\Omega^2 &= \mathcal{B}\mathcal{A} + \mathcal{C}\mathcal{E} \\ &= (u^t)^2 \underbrace{\left(\Gamma^r_{tt} + \frac{1}{c^2} a^r g_{tt} \right)}_{\textcircled{1}} \underbrace{\left(\Gamma^t_{tr} - \frac{1}{c^2} a^r g_{rr} \right)}_{\textcircled{2}} \\ &\quad + (u^\varphi)^2 \underbrace{\left(\Gamma^r_{\varphi\varphi} + \frac{1}{c^2} a^r g_{\varphi\varphi} \right)}_{\textcircled{3}} \underbrace{\left(\Gamma^\varphi_{\varphi r} - \frac{1}{c^2} a^r g_{rr} \right)}_{\textcircled{4}} \end{aligned}$$

Anschließend können wir die Christoffelsymbole und Metrik-Koeffizienten in die Terme ①–④ einsetzen und diese ausmultiplizieren:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &= -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \left(\frac{3}{2}r_s - r\right) \omega^2, & \textcircled{2} &= -\frac{r}{r - r_s} \left(\frac{3}{2}r_s - r\right) \frac{\omega^2}{c^2}, \\ \textcircled{3} &= \left(\frac{3}{2}r_s - r\right) \left(1 + \frac{r^2\omega^2}{c^2}\right), & \textcircled{4} &= \frac{2r - 3r_s}{2r(r - r_s)} \left(1 + \frac{r^2\omega^2}{c^2}\right). \end{aligned}$$

Die weitere Rechnung ist jetzt ein wenig einfacher und liefert

$$\Omega = \omega \left(r - \frac{3}{2}r_s\right) \sqrt{\frac{\omega^2 r^2 / c^2 + 1}{r(r - r_s)}}. \quad (\text{L.3.52})$$

Die geodätische Präzession α errechnet sich nun aus der Änderung der Orientierung eines Vektors nach einem vollen Umlauf. Mit der Eigenzeit $\tau_{2\pi} = 2\pi/\omega$ für einen Umlauf, erhalten wir schließlich

$$\alpha = 2\pi - \Omega\tau_{2\pi} = 2\pi \left(1 - \frac{\Omega}{\omega}\right). \quad (\text{L.3.53})$$

Als Beispiel betrachten wir die geodätische Präzession für einen freien Kreisorbit auf dem letzten stabilen Orbit $r = 3r_s$. Da es sich um eine geodätische Bewegung handeln soll, muss die radiale Beschleunigung verschwinden. Aus $a^r = 0$ erhalten wir so die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_g^2 = \frac{c^2 r_s}{r^2(2r - 3r_s)}. \quad (\text{L.3.54})$$

Einsetzen in (L.3.52) liefert nach kurzer Rechnung

$$\alpha_g = 2\pi \left(1 - \sqrt{1 - \frac{3r_s}{2r}}\right). \quad (\text{L.3.55})$$

Setzen wir nun noch für r den Radius des letzten stabilen Orbits ein, so erhalten wir $\alpha_g = 105,44^\circ$, siehe Abb. 13.14.

Kap. 14 Kerr-Metrik

14.1 Werte des Drehimpulsparameters

Zur Bestimmung des Drehimpulsparameters a benötigen wir zuerst den Drehimpuls einer klassischen Vollkugel. Sei deren Masse gegeben durch $M = 4\pi R^3 \rho/3$ mit einer

konstanten, vom Radius unabhängigen, Dichte ρ . Der Einfachheit halber soll die Drehachse der z -Achse entsprechen. Der Betrag $d\mathbf{J}$ eines Massenelements dm am Ort $\mathbf{r} = (r \sin \vartheta \cos \varphi, r \sin \vartheta \sin \varphi, r \cos \vartheta)$ mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} zum Gesamtdrehimpuls \mathbf{J} ist gegeben durch

$$d\mathbf{J} = dm\mathbf{r} \times \mathbf{v}. \quad (\text{L.3.56})$$

Aus der Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2\pi/P$ und der Periodendauer P erhalten wir für die Geschwindigkeit $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, wobei hier $\boldsymbol{\omega} = (0,0,\omega)$. Nutzen wir die Vektorrelation $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ aus, so erhalten wir

$$d\mathbf{J} = dm\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = dm(r^2\boldsymbol{\omega} - \omega r \cos \vartheta \mathbf{r}). \quad (\text{L.3.57})$$

In sphärischen Koordinaten gilt für das Massenelement $dm = \rho r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi$.

Aus Symmetriegründen kann man sich leicht klar machen, dass der resultierende Gesamtdrehimpuls nur eine z -Komponente besitzen kann. Wir können das aber auch sofort rechnerisch belegen. Da $\boldsymbol{\omega}$ nur eine z -Komponente besitzt, müssen wir nur den zweiten Term in (L.3.57) genauer betrachten. Die x - und y -Komponente enthält das verschwindende Integral

$$\int_0^\pi \sin^2 \vartheta \cos \vartheta d\vartheta = 0, \quad (\text{L.3.58})$$

wohingegen die z -Komponente das Integral

$$\int_0^\pi \sin \vartheta \cos^2 \vartheta d\vartheta = \frac{2}{3} \quad (\text{L.3.59})$$

enthält. Für die z -Komponente des Gesamtdrehimpulses erhalten wir so

$$\begin{aligned} J_z &= 2\pi\rho\omega \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^R r^4 dr - 2\pi\rho\omega \frac{2}{3} \int_0^R r^4 dr = \frac{8\pi}{15} \rho R^5 \omega \\ &= \frac{4\pi}{3} \rho R^3 \frac{2}{5} R^2 \omega = \frac{2}{5} MR^2 \omega. \end{aligned} \quad (\text{L.3.60})$$

Der Drehimpulsparameter $a = J/(Mc)$ für eine klassische Vollkugel lautet somit

$$a = \frac{2}{5} R^2 \frac{\omega}{c} \quad (\text{L.3.61})$$

und hat die Dimension einer Länge. Im Fall der Sonne mit ihrer Periodendauer von $P_\odot \approx 2,5 \cdot 10^6$ s und einem Neutronenstern mit $P \approx 1,4$ ms erhalten wir die Werte aus Tab. 3.1. Dabei haben wir die Gravitationskonstante der Tab. A.1 und die Parameter der Sonne der Tab. (1.2) entnommen.

Tabelle 3.1: Beispielwerte für die Sonne und einen Neutronenstern.

Masse	r_s	R	ω	a	$a/(r_s/2)$
$1 M_\odot$	2.953,2 m	$6,96 \cdot 10^8$ m	$2,513 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$	1.624,4 m	1,1
$1,4 M_\odot$	4.134,5 m	10^4 m	$4.488,0 \text{ s}^{-1}$	598,8 m	0,2897

4 Sternentwicklung

Kap. 17 Sternentstehung

17.1 Virialsatz im harmonischen Potential

Für das harmonische Potential gilt $n = 2$ und damit $\bar{T} = \bar{V}$. Die mittlere kinetische und mittlere potentielle Energie sind gleich.

Dieses bekannte Ergebnis sieht man auch direkt an den Lösungen der harmonischen Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (\text{L.4.1})$$

mit dem zugehörigen harmonischen Potential

$$V = \frac{D}{2} x^2, \quad (\text{L.4.2})$$

wobei $\omega_0 = \sqrt{D/m}$ gilt. Die Lösungen von (L.4.1) sind von der Form

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t), \quad (\text{L.4.3})$$

d. h.

$$\dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t). \quad (\text{L.4.4})$$

Damit ist z. B. für $B = 0$

$$T(t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t) = \frac{D}{2} A^2 \sin^2(\omega_0 t) \quad (\text{L.4.5})$$

und

$$V(t) = \frac{D}{2} A^2 \cos^2(\omega_0 t). \quad (\text{L.4.6})$$

$T(t)$ und $V(t)$ sind nicht gleich, aber bei Mittelung über eine volle Periode liefern $\cos^2(\omega_0 t)$ und $\sin^2(\omega_0 t)$ jeweils den gleichen Beitrag:

$$\frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_0} \sin^2(\omega_0 t) dt = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_0} \cos^2(\omega_0 t) dt = \frac{1}{2}, \quad (\text{L.4.7})$$

so dass die gemittelten Werte $\bar{T} = \bar{V}$ gleich sind. Das Gleiche gilt natürlich auch für den allgemeinen Ansatz mit $B \neq 0$.

Kap. 20 Weiße Zwerge

20.1 Masse-Radius-Beziehung für weiße Zwerge

Die Lösung dieser Aufgabe ist noch in Bearbeitung.

Kap 21 Neutronensterne

21.1 TOV-Gleichung für konstante Dichte

Bei konstanter Dichte gilt

$$M(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_m. \quad (\text{L.4.8})$$

Damit erhält die TOV-Gleichung (21.30) die Form

$$\frac{dp}{dr} = -G\frac{4}{3}\pi\rho_m^2 r \left(1 + \frac{p(r)}{\rho_m c^2}\right) \left(1 + \frac{3p(r)}{\rho_m c^2}\right) \left(1 - \frac{8}{3}\pi G r^2 \frac{\rho_m}{c^2}\right)^{-1}. \quad (\text{L.4.9})$$

Wir separieren die Variablen und integrieren:

$$\int_{p'}^0 \frac{dp}{\left(1 + \frac{p(r)}{\rho_m c^2}\right) \left(1 + \frac{3p(r)}{\rho_m c^2}\right)} = \int_r^R -G\frac{4}{3}\pi\rho_m^2 r \left(1 - \frac{8}{3}\pi G r^2 \frac{\rho_m}{c^2}\right)^{-1} dr. \quad (\text{L.4.10})$$

Das ergibt

$$\ln\left(\frac{\rho_m c^2 + p}{\rho_m c^2 + 3p}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\frac{8}{3}\pi G \frac{\rho_m}{c^2} R^2 - 1}{\frac{8}{3}\pi G \frac{\rho_m}{c^2} r^2 - 1}\right) \quad (\text{L.4.11})$$

und schließlich

$$p(r) = \rho_m c^2 \frac{1 - \sqrt{\frac{\frac{8}{3}\pi G \frac{\rho_m}{c^2} R^2 - 1}{\frac{8}{3}\pi G \frac{\rho_m}{c^2} r^2 - 1}}}{3 \sqrt{\frac{\frac{8}{3}\pi G \frac{\rho_m}{c^2} R^2 - 1}{\frac{8}{3}\pi G \frac{\rho_m}{c^2} r^2 - 1} - 1}}. \quad (\text{L.4.12})$$

Aus dem hydrostatischen Gleichgewicht in Newton'scher Rechnung in Gl. (18.7) folgt für konstante Dichte der quadratische Zusammenhang

$$p(r) = G\frac{2}{3}\pi\rho_m^2 (R^2 - r^2). \quad (\text{L.4.13})$$

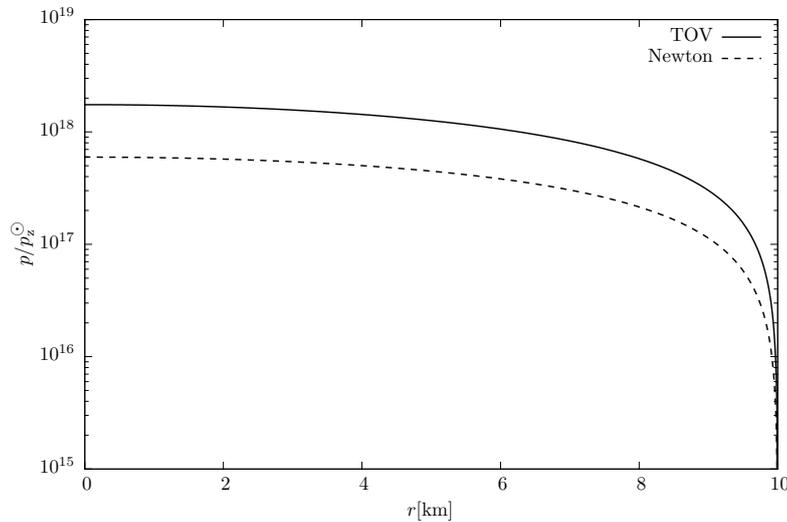


Abbildung 4.1: Vergleich der $p(r)$ Kurven in Newton'scher und allgemein-relativistischer Rechnung für eine Kugel mit konstanter Dichte $\rho_m = 10^{18} \text{ kgm}^{-3}$ und einem Radius von 10 km. Das ist ein grobes Modell für einen Neutronenstern (s. Gl. (21.8), (21.10)). Der Druck ist angegeben in Einheiten des Drucks im Zentrum der Sonne in Gl. (18.21) $p_z^\odot = 2,34 \cdot 10^{16} \text{ Pa}$.

21.2 Millisekundenpulsar

Um diese Aufgabe zu lösen, nutzen wir aus, dass eine Oktave aus 12 Halbtonschritten besteht und außerdem dem Frequenzverhältnis 1 : 2 entspricht. Ein Halbtonschritt entspricht also einem Frequenzverhältnis von $1 : 2^{1/12}$.

a) Mit diesen Vorinformationen können wir jetzt mit der Frequenz des Pulsars

$$\nu_{\text{Pulsar}} = \frac{1}{P} = 641,85 \text{ Hz} \quad (\text{L.4.14})$$

und der Frequenz $\nu_{a^1} = 440 \text{ Hz}$ des Kammertons a^1 die Bedingung

$$2^{n/12} = \frac{\nu_{\text{Pulsar}}}{\nu_{a^1}} \quad (\text{L.4.15})$$

herleiten. Es ergibt sich also

$$n = 12 \frac{\ln(\nu_{\text{Pulsar}}/\nu_{a^1})}{\ln 2} \approx 6,54. \quad (\text{L.4.16})$$

Am ehesten entspricht die Frequenz des Pulsars also dem Klavierton 7 Halbtonschritte über dem a^1 . Das ist das zweigestrichene e^2 .

b) Die Zeit, bis die Frequenz des Pulsars einen Halbton tieferliegt, ergibt sich mit

$$\nu_{\text{Pulsar}}(t) = \frac{1}{P + \dot{P}t} \quad (\text{L.4.17})$$

direkt aus der Gleichung

$$\frac{\nu_{\text{Pulsar}}(t)}{\nu_{\text{Pulsar}}(0)} = 2^{-1/12} = \frac{P}{P + \dot{P}t}, \quad (\text{L.4.18})$$

d. h.

$$t = \frac{(2^{1/12} - 1)P}{\dot{P}} = 8,8 \cdot 10^{14} \text{ s} \approx 2,8 \cdot 10^7 \text{ y.} \quad (\text{L.4.19})$$

5 Kosmologie

Kap. 24 Modellannahmen zur Struktur des Universums

24.1 FLRW-Metrik in konform-euklidischen Koordinaten

- a) Ausgangspunkt dieser Rechnung ist der zweidimensionale Anteil (24.20a) der FLRW-Metrik

$$dl^2 = a^2 (d\vartheta^2 + \sin^2(\vartheta) d\varphi^2) \quad (\text{L.5.1})$$

bei dem wir zuerst den Term $\sin^2(\vartheta)$ wie folgt ersetzen wollen

$$\sin^2(\vartheta) = 4 \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = 4 \frac{\tan^2(\vartheta/2)}{1 + \tan^2(\vartheta/2)} \frac{1}{1 + \tan^2(\vartheta/2)}. \quad (\text{L.5.2})$$

Mit der Substitution (24.21), $\bar{r} = 2 \tan(\vartheta/2)$, folgt dann sofort

$$\sin^2(\vartheta) = \frac{\bar{r}^2}{\left(1 + \frac{\bar{r}^2}{4}\right)^2}. \quad (\text{L.5.3})$$

Um $d\vartheta$ durch $d\bar{r}$ zu ersetzen, bestimmen wir das Differential

$$\begin{aligned} d\bar{r} &= 2d \left[\tan\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \right] = 2d \left[\frac{\sin(\vartheta/2)}{\cos(\vartheta/2)} \right] = \frac{\cos^2(\vartheta/2) + \sin^2(\vartheta/2)}{\cos^2(\vartheta/2)} d\vartheta \\ &= \left[1 + \tan^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \right] d\vartheta = \left(1 + \frac{\bar{r}^2}{4} \right) d\vartheta. \end{aligned} \quad (\text{L.5.4})$$

Gleichung (L.5.1) haben wir bis jetzt in

$$dl^2 = \frac{a^2}{\left(1 + \frac{\bar{r}^2}{4}\right)} (d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\varphi^2) \quad (\text{L.5.5})$$

transformiert. Um auch noch die hintere Klammer ersetzen zu können, bestimmen wir zuerst die Differentiale von \bar{x} und \bar{y} . Es gilt

$$d\bar{x} = d\bar{r} \cos \varphi - \bar{r} \sin \varphi d\varphi, \quad (\text{L.5.6a})$$

$$d\bar{y} = d\bar{r} \sin \varphi + \bar{r} \cos \varphi d\varphi. \quad (\text{L.5.6b})$$

Quadriert man beide Terme und summiert sie, so fällt sofort auf, dass die gemischten trigonometrischen Terme verschwinden und die anderen beiden sich zu Eins kombinieren. So ergibt sich schließlich $d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 = d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\varphi^2$ und wir erhalten (.

b) Für den Fall der negativen Krümmung starten wir mit (24.20b),

$$dl^2 = a^2 (d\vartheta^2 + \sinh^2(\vartheta)d\varphi^2). \quad (\text{L.5.7})$$

Nun benötigen wir erst einige Rechenregeln für die hyperbolischen Funktionen. Neben $\cosh^2(\vartheta) - \sinh^2(\vartheta) = 1$ gilt weiterhin

$$\sinh(\vartheta) = 2 \sinh\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \cosh\left(\frac{\vartheta}{2}\right). \quad (\text{L.5.8})$$

Setzen wir $\tanh^2(\vartheta) = \sinh^2(\vartheta)/\cosh^2(\vartheta)$, so können wir einmal nach $\sinh^2(\vartheta)$ und ein andermal nach $\cosh^2(\vartheta)$ auflösen und erhalten so

$$\sinh^2(\vartheta) = \frac{\tanh^2(\vartheta)}{1 - \tanh^2(\vartheta)} \quad \text{und} \quad \cosh^2(\vartheta) = \frac{1}{1 - \tanh^2(\vartheta)}. \quad (\text{L.5.9})$$

Analog zum Fall mit positiver Krümmung schreiben wir

$$\begin{aligned} \sinh^2(\vartheta) &= 4 \sinh^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \cosh^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = \frac{4 \tanh^2(\vartheta/2)}{1 - \tanh^2(\vartheta/2)} \frac{1}{1 - \tanh^2(\vartheta/2)} \\ &= \frac{\bar{r}^2}{\left(1 - \frac{\bar{r}^2}{4}\right)}. \end{aligned} \quad (\text{L.5.10})$$

Das Differential von \bar{r} führt uns hier auf

$$\begin{aligned} d\bar{r} &= 2d\left[\tanh\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\right] = 2d\left[\frac{\sinh(\vartheta/2)}{\cosh(\vartheta/2)}\right] = \frac{\cosh^2(\vartheta/2) - \sinh^2(\vartheta/2)}{\cosh^2(\vartheta/2)} d\vartheta \\ &= \frac{d\vartheta}{\cosh^2(\vartheta/2)} = \left[1 - \tanh^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\right] d\vartheta. \end{aligned} \quad (\text{L.5.11})$$

Und so erhalten wir schließlich

$$dl^2 = \frac{a^2}{\left(1 - \frac{\bar{r}^2}{4}\right)^2} (d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\varphi^2) = \frac{a^2}{\left(1 - \frac{\bar{r}^2}{4}\right)^2} (d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2). \quad (\text{L.5.12})$$

Kap. 26 Allgemeine Energieformen

26.1 Big Rip Modelle

Um die Lösung möglichst anschaulich formulieren zu können, setzen wir $w = -\left(1 + \frac{2}{3}c\right)$ mit $c > 0$. Dann ergibt sich aus Gleichung (26.60)

$$\int a^{-(1+c)} da = H_0 t + \mathcal{C}, \quad (\text{L.5.13})$$

mit der Lösung

$$a^c = -c(H_0 t + \mathcal{C})^{-1}. \quad (\text{L.5.14})$$

Die Anfangsbedingung $a(0) = 1$ liefert $\mathcal{C} = -1/c$, d.h.

$$a(t) = (1 - H_0 c t)^{-1/c} = (1 - H_0 c t)^{\frac{2}{3(w+1)}}. \quad (\text{L.5.15})$$

26.2 Ereignishorizont der De-Sitter-Metrik

Die de-Sitter-Metrik hat das Linienelement

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + e^{2H_0 t} [dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin\vartheta d\varphi^2)]. \quad (\text{L.5.16})$$

Aus Symmetriegründen, bzw. wegen des kosmologischen Prinzips können wir statt eines bei $r = r_B$ hin zu $r = 0$ loslaufenden Lichtstrahls auch einen Strahl betrachten, der genau entgegengesetzt läuft. Wegen $ds = 0$ für Lichtstrahlen gilt für einen radial nach außen laufenden Strahl

$$e^{H_0 t} dr = c dt, \quad (\text{L.5.17})$$

d. h.

$$\int_{r=0}^{r=r_B} dr = \int_{t_B}^{t_{\text{ank}}} e^{-H_0 t} c dt \quad (\text{L.5.18})$$

mit der Ankunftszeit t_{ank} . Also ist

$$r_B = \frac{c}{H_0} (e^{-H_0 t_B} - e^{-H_0 t_{\text{ank}}}). \quad (\text{L.5.19})$$

Auflösen liefert

$$t_{\text{ank}} = -\frac{1}{H_0} \ln \left(e^{-H_0 t_B} - \frac{H_0 r_B}{c} \right). \quad (\text{L.5.20})$$

Eine Lösung existiert nur, falls das Argument des Logarithmus größer als Null ist, d. h. nur für

$$r_B < \frac{c}{H_0} e^{-H_0 t_B}. \quad (\text{L.5.21})$$

Dieses Ergebnis bedeutet, dass Licht, welches zur Zeit t_B im Ursprung losläuft, maximal solche Objekte im De-Sitter-Universum erreichen kann, deren Radialkoordinate Gleichung (L.5.21) erfüllt. Andersherum kann nur solches Licht von einer Quelle bei $r = r_B$ den Beobachter im Ursprung erreichen, das vor $t = t_B$ ausgestrahlt wurde. Über Ereignisse, die dort später stattfinden, kann er keine Informationen erhalten. Die de-Sitter-Metrik hat also einen Ereignishorizont, ähnlich wie die Schwarzschild-Metrik.

26.3 Details zum Modell mit Strahlung, kosmologischer Konstante und Krümmung

Aus $a_{r\Lambda q}(t)$ aus Gleichung (26.104) ergibt sich für $\Omega_{r0} = \Omega_{r1krit} = (1 + \sqrt{\Omega_{\Lambda 0}})^2$ mit $\Omega_q = -2(\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}} + \Omega_{\Lambda 0})$ und $\Omega_{r2krit} - \Omega_{r1krit} = -4\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}$.

$$a_{r\Lambda qkrit1}(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{\Omega_{\Lambda 0}}} \left(-e^{-2\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}H_0 t} + \sqrt{\Omega_{\Lambda 0} + 1} \right)^{1/2}. \quad (\text{L.5.22})$$

Analog findet man für $\Omega_{r0} = \Omega_{r1krit} = (1 - \sqrt{\Omega_{\Lambda 0}})^2$

$$a_{r\Lambda qkrit2}(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{\Omega_{\Lambda 0}}} \left(e^{2\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}H_0 t} + \sqrt{\Omega_{\Lambda 0} - 1} \right)^{1/2}. \quad (\text{L.5.23})$$

Unabhängig vom Wert von $\Omega_{\Lambda 0}$ hat das $a_{r\Lambda qkrit1}$ -Modell einen Urknall bei

$$t_{\text{BBkrit1}} = -\frac{1}{2} \frac{\ln(\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}} + 1)}{\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}H_0}. \quad (\text{L.5.24})$$

Für große Zeiten nähert sich sein Skalenfaktor dem konstanten Wert

$$a_{r\Lambda qkrit1}(t \mapsto \infty) = \frac{1}{\sqrt[4]{\Omega_{\Lambda 0}}} \left(\sqrt{\Omega_{\Lambda 0} + 1} \right)^{1/2}. \quad (\text{L.5.25})$$

Das $a_{r\Lambda qkrit2}$ -Modell dagegen hat nur für $\Omega_{\Lambda 0} > 1$ einen Urknall bei

$$t_{\text{BBkrit1}} = \frac{1}{2} \frac{\ln(-\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}} + 1)}{\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}H_0}. \quad (\text{L.5.26})$$

Für $\Omega_{\Lambda 0} > 1$ dagegen geht sein Skalenfaktor für negative Zeiten gegen den konstanten Wert

$$a_{r\Lambda qkrit2}(t \mapsto -\infty) = \frac{1}{\sqrt[4]{\Omega_{\Lambda 0}}} \left(\sqrt{\Omega_{\Lambda 0} - 1} \right)^{1/2}. \quad (\text{L.5.27})$$

Unabhängig von $\Omega_{\Lambda 0}$ expandiert dieses Modell in der Zukunft $\sim \exp(\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}H_0 t)$.

Kap. 29 Kosmische Mikrowellenhintergrundstrahlung

29.1 Dipol-Anisotropie der Hintergrundstrahlung

Man deutet die Dipolanisotropie als Dopplerverschiebung, die dadurch verursacht wird, dass sich die Erde geradlinig unter einem Winkel ϑ relativ zu einem geeigneten Bezugspunkt auf der Himmelskugel bewegt. Die Rechnung wird einfacher, wenn wir annehmen, dass die Quelle der Hintergrundstrahlung sich relativ zum Ruhssystem der Erde mit der Geschwindigkeit v zu bewegt. Das Relativitätsprinzip lässt das zu. Nach Gleichung (8.13) hängt die auf der Erde empfangene Frequenz ν_{Erde} mit der Frequenz der Strahlungsquelle ν_{Quelle} exakt über die Beziehung

$$\nu_{\text{Erde}} = \nu_{\text{Quelle}} \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta} \quad (\text{L.5.28})$$

zusammen. Für nichtrelativistische Geschwindigkeiten, die wir hier annehmen, vereinfacht sich dies zu

$$\frac{\nu_{\text{Quelle}}}{\nu_{\text{Erde}}} \approx 1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta. \quad (\text{L.5.29})$$

Das Verhältnis der Temperatur der Planckstrahlung der Quelle und der auf der Erde empfangenen Planckverteilung ist gegeben durch das Verhältnis der zugehörigen Frequenzen

$$\frac{T_{\text{Quelle}}}{T_{\text{Erde}}} = \frac{\nu_{\text{Quelle}}}{\nu_{\text{Erde}}}. \quad (\text{L.5.30})$$

Mit der Definition $\Delta T = T_{\text{Erde}} - T_{\text{Quelle}}$ können wir schreiben

$$\frac{T_{\text{Quelle}}}{T_{\text{Erde}}} = \frac{T_{\text{Erde}} - \Delta T}{T_{\text{Erde}}} = 1 - \frac{\Delta T}{T_{\text{Erde}}}. \quad (\text{L.5.31})$$

Kombiniert man (L.5.31) mit (L.5.30), so liefert der Vergleich mit (L.5.29)

$$\frac{\Delta T}{T_{\text{Erde}}} = \frac{v}{c} \cos \vartheta, \quad (\text{L.5.32})$$

also ist

$$\Delta T = T_{\text{Erde}} \underbrace{\frac{v}{c}}_{\Delta T_{\text{max}}} \cos \vartheta \quad (\text{L.5.33})$$

Die Relativgeschwindigkeit ergibt sich daher zu

$$v = \frac{\Delta T_{\text{max}}}{T_{\text{Erde}}} c = \frac{3,369 \times 10^{-3} \text{ K}}{2,725 \text{ K}} \approx 0,00124 c \approx 371 \frac{\text{km}}{\text{s}}. \quad (\text{L.5.34})$$

Kap. 30 Die ersten Momente

30.1 Bedeutung der Planck-Ladung

Die Bedingung

$$F_m = F_C \quad (\text{L.5.35})$$

führt auf

$$Gm_{\text{Pl}}^2 = \frac{q_{\text{Pl}}^2}{4\pi\epsilon_0}. \quad (\text{L.5.36})$$

Mit den Werten für die Planck-Masse und die Planck-Ladung aus Tab. 30.1 ergibt das direkt die Identität

$$\hbar c = \hbar c. \quad (\text{L.5.37})$$

30.2 Homogenität des CMB

Um den Weg berechnen zu können, den ein Lichtstrahl vom Urknall bis zur Entkopplung von Strahlung und Materie zurückgelegt hat, müssen wir wissen, wie sich der Skalenfaktor des Universums während dieser Zeit entwickelt hat. Aus Abb 26.3 ersehen wir, dass das Universum bis zur Entkopplung bei $z \approx 1000$ (in Abb 26.3 $\log(a) \approx 10^{-3}$) über einen langen Zeitraum strahlungsdominiert war. Unter der Annahme eines flachen Universums gilt für den Skalenfaktor im strahlungsdominierten Universum nach (26.61) und mit $w_r = 1/3$ aus (26.31) $a(t) \propto t^{1/2}$, d. h. mit dem heutigen Wert $a(t_0) = a_0$

$$a(t) = a_0 \sqrt{t/t_r} \quad (\text{L.5.38})$$

mit einer noch zu bestimmenden Referenzzeit t_r . Ein durchrechenbares Modell erhalten wir, wenn wir annehmen, dass das Universum bis zum Zeitpunkt der Entkopplung *strahlungsdominiert* war. Dies ist eine grobe Näherung, denn wir haben in Abb. 26.3 gesehen, dass das Universum sich ab $z \approx 3000$ materiedominiert ausdehnte. In unserem Modell werden wir jedoch zumindest eine *Abschätzung* für den Winkeldurchmesser der kausal verknüpften Regionen auf der Himmelskugel erhalten.

Um den Wert der in (L.5.38) auftretenden Referenzzeit t_r zu bestimmen, lösen wir die Friedmann-LeMaître Gleichung

$$\dot{a}^2 - \frac{8\pi G}{3}\sigma a^2 - \frac{\Lambda c^2}{3}a^2 = -qc^2 \quad (\text{L.5.39})$$

für $q = 0$. Das kosmologische Glied können wir in der Frühphase des Universums vernachlässigen. Nach Abschnitt 26.7.1 fällt die Strahlungsdichte proportional zu a^{-4} ab, ausgedrückt durch den heutigen Wert der Strahlungsdichte $\sigma_r(t_0) = \sigma_{r0}$ können wir daher (L.5.39) schreiben als

$$\dot{a}^2 - \frac{8\pi G}{3}\sigma_{r0} \frac{a_0^4}{a^4} a^2 = 0, \quad (\text{L.5.40})$$

woraus folgt

$$\dot{a} = \sqrt{\frac{8\pi G \sigma_{r0} a_0^4}{3}} \frac{1}{a}. \quad (\text{L.5.41})$$

Bringen wir a auf die linke Seite und berücksichtigen wir, dass $a\dot{a} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a^2$, so erhalten wir zunächst

$$a^2(t) = \sqrt{\frac{32\pi G \sigma_{r0} a_0^4}{3}} t \quad (\text{L.5.42})$$

(für $t = 0$ nehmen wir $a = 0$ an), und damit die Lösung

$$a(t)/a_0 = \left(\frac{32\pi G \sigma_{r0}}{3} \right)^{1/4} \sqrt{t}. \quad (\text{L.5.43})$$

Vergleichen wir mit (L.5.38), so ergibt sich die Referenzzeit t_r zu

$$t_r = \left(\frac{3}{32\pi G \sigma_{r0}} \right)^{1/2}. \quad (\text{L.5.44})$$

Mit dem Wert von $\Omega_{r0} = 8,4 \cdot 10^{-5}$ aus (26.64) und der kritischen Dichte von ca. $9 \cdot 10^{-27} \text{ kg m}^{-3}$ aus (26.8) erhalten wir $\sigma_{r0} \approx 7,6 \cdot 10^{-31} \text{ kg m}^{-3}$. Setzen wir diesen Wert zusammen mit dem der Gravitationskonstanten aus Tab. A.1 in (L.5.44) ein, so ergibt sich $t_r \approx 2,4 \cdot 10^{19} \text{ s}$. Vergleicht man mit der Dauer eines Jahres, $1 \text{ y} = 3,15 \cdot 10^7 \text{ s}$, so entspricht die Referenzzeit $t_r \approx 7,6 \cdot 10^{11} \text{ y}$.

Wir berechnen den Weg, den Licht vom Urknall bei $t = 0$ bis zur Entkopplung bei t_e in unserem Modell zurückgelegt hat. Für Lichtausbreitung gilt $ds^2 = 0 = c^2 dt^2 - a^2(t) dr^2$, also ist $c dt = a(t) dr$ und damit $dr = \frac{c}{a(t)} dt$. Der zurückgelegte Wert in der r -Koordinate berechnet sich dann zu

$$R = c \int_0^{t_e} \frac{dt}{a(t)} = \frac{c}{a_0} \int_0^{t_e} (t_r/t)^{1/2} dt = \frac{c\sqrt{t_r}}{a_0} 2\sqrt{t_e} = \frac{2c}{a_0} \sqrt{t_r t_e}. \quad (\text{L.5.45})$$

Aus heutiger Sicht entspricht dies einer Strecke von $\ell_0 = a_0 \cdot R = 2c\sqrt{t_r t_e}$. Mit dem oben gewonnenen Wert für die Referenzzeit und $t_e \approx 3,8 \cdot 10^5 \text{ y}$ ergibt sich als Zahlenwert $\ell_0 = 1,07 \cdot 10^9 \text{ ly}$. Als Entfernung, aus der wir diese Strecke heute sehen, wählen wir die Hubble-Distanz $d_0 = cH_0^{-1} = 1,41 \cdot 10^{10} \text{ ly}$ aus (23.12). Der Winkel, unter dem wir ℓ_0 sehen, ergibt sich dann zu

$$\vartheta = \ell_0/d_0 = 0,076 \frac{180^\circ}{\pi} = 4,3^\circ. \quad (\text{L.5.46})$$

Dieser Winkel ist doppelt so groß wie der im Buch angegebene, was an unserer Näherung eines strahlungsdominierten Universums bis zur Entkopplung liegt. Er gibt aber die Größenordnung richtig wieder. Ab $z \approx 3000$ dehnte sich das Universum

materiedominiert mit $a(t) \propto t^{2/3}$ aus, expandierte daher schneller als ein strahlungsdominiertes mit nur $a(t) \propto t^{1/2}$. Bis zur Entkopplung legte das Licht daher ab $z \approx 3000$ eine kürzere Strecke im Materieuniversum zurück als in einem langsamer expandierenden Strahlungsuniversum. Dadurch reduziert sich auch der Wert des Winkels ϑ in (L.5.46).