Übungen zur Vorlesung Theoretische Physik LA 1 **WS 2016/17**

Apl. Prof. Dr. J. Main **Blatt 3**

Aufgabe 9 : Rotierende Bezugssysteme und Scheinkräfte **(schriftlich)**

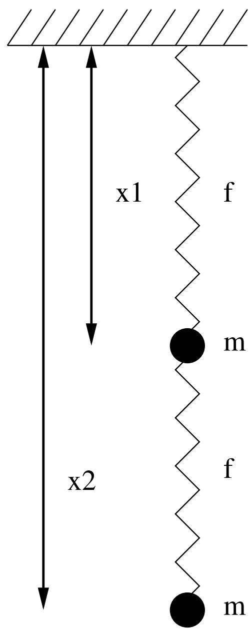
Ein Massenpunkt m sei zunächst starr mit dem raumfesten Punkt O verbunden und rotiere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω in einem Abstand R um diesen Punkt.

a) Wie sieht für $t > t_0$ die Bahnkurve $\boldsymbol{r}(t)$ des Massenpunktes im ruhenden Koordinatensystem K aus, wenn zum Zeitpunkt $t = t_0$ die starre Verbindung zwischen O und dem Massenpunkt aufgehoben wird. Wie sieht die Bahnkurve $\boldsymbol{r}'(t)$ des Punktes im mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um O rotierenden Bezugssystem K' aus? Skizzieren Sie die beiden Bahnkurven. (2 Punkte)

b) Für einen Beobachter in K' sieht die Bewegung aus, als ob auf m eine Kraft wirkt. Berechnen Sie diese Kraft. Wie hängt der Betrag dieser Kraft vom Abstand $r'(t)$ der Masse m vom Ursprung ab? Setzen Sie $x'(0) = R$ und $y'(0) = 0$. (2 Punkte)

Aufgabe 10 : Gekoppelte Schwingungen

Zwei Massen m seien an zwei Federn aufgehängt, welche die Federkonstante f und im ungedehnten Zustand die Länge l_0 besitzen.



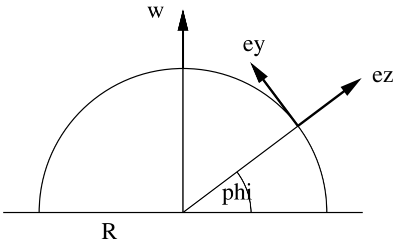
a) Stellen Sie das Potenzial $V(x_1, x_2)$ auf und bestimmen Sie die Ruhelagen des Systems. (2 Punkte)

b) $\tilde{x}_i$ $(i = 1, 2)$ sei die Auslenkung der Masse i aus ihrer Ruhelage. Wie lautet $V(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$? Wie sieht die Bewegungsgleichung für $\tilde{\boldsymbol{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ in vektorieller Schreibweise aus? (2 Punkte)

c) Machen Sie den Lösungsansatz $\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{a}\cos(\omega t - \varphi)$ und bestimmen Sie die Eigenfrequenzen ω_j und die normierten Eigenvektoren $\boldsymbol{a}_j$. (2 Punkte)

d) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen in den Normalkoordinaten z_i her. Geben Sie die Normalschwingungen des Systems an, ausgedrückt in den ursprünglichen Koordinaten $\tilde{x}_i$ sowie den Normalkoordinaten z_i, und diskutieren Sie diese. (2 Punkte)

Aufgabe 11 : Bewegungen auf der rotierenden Erde



Die Bewegung eines Massenpunktes m auf der rotierenden Erde beschreibt man in der Regel in einem mitrotierenden Labor-Bezugssystem K' mit $\boldsymbol{r}' = (x, y, z)$. Dabei ist K' kein Inertialsystem mehr, und es treten Scheinkräfte auf. Für Bewegungen nahe der Erdoberfläche ($|\boldsymbol{r}'| \ll R$) gilt näherungsweise:

$$\ddot{\boldsymbol{r}}' = -\hat{g}\, \boldsymbol{e}_z - 2\, \boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}}'.$$

Dabei bezeichnet $\hat{g}$ die lokale gemessene Erdbeschleunigung, in der die Auswirkungen der Zentrifugalkraft und der Abweichung der Erde von der Kugelgestalt enthalten sind. Der zweite Term ist die Coriolis-Beschleunigung.

a) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für die Komponenten x, y und z von $\boldsymbol{r}'$ auf. Dabei soll die x-Achse nach Osten zeigen, die y-Achse nach Norden und die z-Achse vertikal nach oben. In welche Richtung zeigt die Coriolis-Kraft auf einen horizontal bewegten Körper am Nordpol/Äquator? (2 Punkte)

b) Eötvös-Effekt: Betrachten Sie einen Körper, der sich nach Osten bewegt. Die Coriolis-Beschleunigung führt zu einer Gewichtsänderung. Wie groß ist sie für einen Körper mit 70 kg Masse und einer Geschwindigkeit von $1\,\mathrm{ms}^{-1}$ in Stuttgart ($\varphi = 48.8°$) und am Äquator? (1 Punkt)

c) Ostablenkung: Betrachten Sie den freien Fall aus einer Höhe h über der Erdoberfläche. Bestimmen Sie die Ostablenkung in Abhängigkeit von h. Wie groß ist sie für $h =$ 100 m in Stuttgart und am Äquator? ($\hat{g} = 9.8\,\mathrm{ms}^{-2}$).

   Hinweis: Berücksichtigen Sie, dass $\dot{x}$ und $\dot{y}$ während des Falls sehr klein bleiben und in den Bewegungsgleichungen vernachlässigt werden können. Verwenden Sie eine entsprechende Näherung auch in d). (1 Punkt)

d) Geostrophische Strömung: Ein Fluss der Breite d fließt auf der Nordhalbkugel mit der Geschwindigkeit v_0 nach Norden. Wie stellt sich die Wasseroberfläche ein? Berechnen Sie den Unterschied zwischen dem Wasserstand des linken und rechten Ufers in Abhängigkeit von φ. Was erhält man für einen Fluss mit $d = 1$ km, $v_0 = 6$ km/h und $\varphi = 30°$, und was für den Golfstrom ($d = 100$ km, $v_0 = 1$ m/s und $\varphi = 45°$) ? (1 Punkt)

Aufgabe 12 : Das Zweikörperproblem

Im Gegensatz zum n-Körperproblem lässt sich das Zweikörperproblem auf ein äquivalentes Einkörperproblem reduzieren und somit allgemein lösen, indem man die Schwerpunkt- und Relativbewegung separiert.

a) Zeigen Sie, dass sich für zwei Teilchen die kinetische Energie und der Drehimpuls folgendermaßen zerlegen lassen:

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= \frac{1}{2}\mu v^2 + \frac{1}{2}MV^2 \\ \boldsymbol{L} &= \mu\, \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} + M\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{V}\,. \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet $M = m_1 + m_2$ die Gesamtmasse und $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ die reduzierte Masse. Ort und Geschwindigkeit des Schwerpunkts werden mit $\boldsymbol{R}$ bzw. $\boldsymbol{V}$ bezeichnet und die Relativkoordinaten mit $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ und $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2$. (2 Punkte)

b) Wie lauten die Bewegungsgleichungen für die Schwerpunkt- und Relativkoordinaten von zwei gravitativ wechselwirkenden Massenpunkten? (1 Punkt)

Abgabe der schriftlichen Aufgabe am Montag, den 7.11. in der Vorlesung.