
Aufgabe 13 : Stabilität von Kreisbahnen (schriftlich)

In dieser Aufgabe soll untersucht werden, welche Bedingungen ein Zentralkraftfeld $\boldsymbol{F} = f(r)\,\boldsymbol{e}_r$ erfüllen muss, damit für ein Teilchen der Masse m stabile Kreisbahnen als Lösung der Bewegungsgleichung möglich sind.

a) Stellen Sie zunächst die Bewegungsgleichung in ebenen Polarkoordinaten (r, φ) auf. Beachten Sie dabei, dass Drehimpulserhaltung gilt. Welchen Wert muss der Drehimpuls annehmen, damit eine Kreisbahn vom Radius R Lösung ist? (2 Punkte)

b) Untersuchen Sie die Stabilität der Kreisbahn aus a) gegenüber einer infinitesimalen radialen Störung ρ der Bahn, d.h. $r(t) = R + \rho(t)$, mit $|\rho|/|R| \ll 1$. Stellen Sie dazu zunächst die Bewegungsgleichung von ρ auf und entwickeln Sie diese nach Potenzen von ρ. Da die Störung infinitesimal ist, kann die Entwicklung nach dem linearen Glied in ρ abgebrochen werden. Geben Sie eine Bedingung für $f(r)$ an, damit Kreisbahnen stabile Lösungen sind. (2 Punkte)

c) Was schließen Sie daraus für Kraftfelder der Form $f(r) = -c/r^n$ $(c > 0)$? (1 Punkt)

Aufgabe 14 : Gleitende Kugel

a) Berechnen Sie das Trägheitsmoment Θ einer Kugelschale mit gegebenem Außen- und Innendurchmesser (R_a und R_i) bezüglich einer Drehachse durch den Mittelpunkt für den Fall homogener Massenverteilung innerhalb der Schale. Was ergibt sich für die Grenzfälle $R_i \to R_a$ und $R_i = 0$? (2 Punkte)

b) Die Kugelschale wird im homogenen Gravitationsfeld auf eine horizontale Unterlage gesetzt und durch einen Kraftstoß auf die Anfangsgeschwindigkeit v_0 gebracht ohne zu rotieren. Die Gleitreibungszahl zwischen Kugelmaterial und Untergrund sei μ_g. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für die Translations- und Rotationsbewegung auf und lösen Sie diese unter der gegebenen Anfangsbedingung. Nach welcher Zeit geht die Gleitbewegung in eine Rollbewegung über? Wie groß ist die Geschwindigkeit der Kugel zu diesem Zeitpunkt (Formel für Θ nicht einsetzen!)? (2 Punkte)

c) Welcher Bruchteil der Anfangsenergie wurde während der Gleitphase der Bewegung von der Reibung aufgezehrt? Welches Ergebnis erhält man für einen Fußball ($R_i \to R_a$) und eine Billardkugel ($R_i = 0$)? (2 Punkte)

Aufgabe 15 : Angetriebener gedämpfter harmonischer Oszillator

Die Bewegungsgleichung eines angetriebenen gedämpften harmonischen Oszillators lautet:

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + m\omega_0^2 x = F(t) \qquad \gamma > 0$$
$$F(t) = \sum_n f_n\, e^{-in\omega t} \qquad n \in \mathbb{Z}$$

a) Welche Bedingung muss für die Fourierkoeffizienten f_n gelten, damit $F(t)$ reell ist? Geben Sie die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung zur Anfangsbedingung $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v_0$ an. Wie verhält sich die Lösung für große Zeiten? (2 Punkte)

Hinweis: Machen Sie einen Fourierreihenansatz für die partikuläre Lösung.

b) Betrachten Sie nun den Fall

$$f_1 = f_{-1} = \frac{F_0}{2}, \qquad f_i = 0 \text{ für alle } i \neq \pm 1,$$

und

$$t \gg \left(\frac{\gamma}{2m} - \mathrm{Re}\sqrt{\left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2 - \omega_0^2} \right)^{-1} \qquad \text{(große Zeiten).}$$

Vereinfachen Sie Ihr obiges Resultat für $x(t)$ für diesen Fall. Bei welcher Frequenz ω wird die Schwingungsamplitude und bei welcher Frequenz die Geschwindigkeitsamplitude maximal? Zeichnen Sie die Schwingungsamplitude über der Frequenz ω. (2 Punkte)

Abgabe der schriftlichen Aufgabe am Montag, den 14.11. in der Vorlesung.