Übungen zur Vorlesung Theoretische Physik LA 1 — **WS 2016/17**

Apl. Prof. Dr. J. Main — **Blatt 5**

Aufgabe 16 : Massenpunkt auf Führungsschiene

Ein Massenpunkt m gleite unter dem Einfluss der Schwerkraft reibungsfrei auf einer Führungsschiene, die durch $y = f(x)$ beschrieben werde. Die Schwerkraft zeige dabei in die negative y-Richtung.

a) Leiten Sie einen Ausdruck für die Zwangskraft $\boldsymbol{F}_z = \boldsymbol{F}_z(f', f'', v^2)$ ab, wobei v den Betrag der Geschwindigkeit des Massenpunktes bezeichnet.

   Hinweis: Machen Sie den Ansatz $\boldsymbol{F}_z = \lambda \hat{\boldsymbol{n}}$ ($\hat{\boldsymbol{n}}$: Normalenvektor auf der Schiene) und lösen Sie die (Newtonschen) Bewegungsgleichungen für x und y nach λ auf. Berücksichtigen Sie, dass sich $\ddot{y}$ durch $\ddot{x}$ ausdrücken lässt. (2 Punkte)

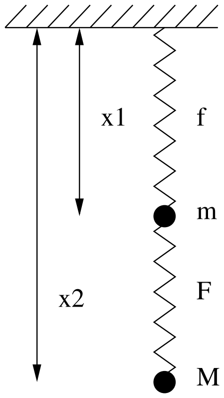
b) Berechnen Sie mit dem Ergebnis aus a) die Zwangskraft für eine schiefe Ebene mit Neigung α. (1 Punkt)

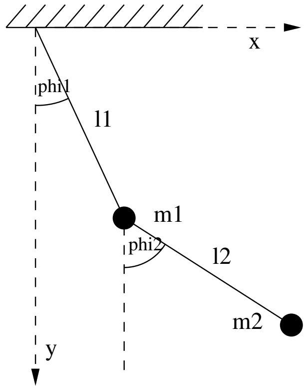
c) Betrachten Sie nun die Bewegung auf einem Kreisbogen mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung und Radius R, $x > 0$. Wie groß ist die Zwangskraft beim Herunterrutschen, wenn die Masse bei $(x, y) = (0, R)$ mit $v = 0$ gestartet wird?

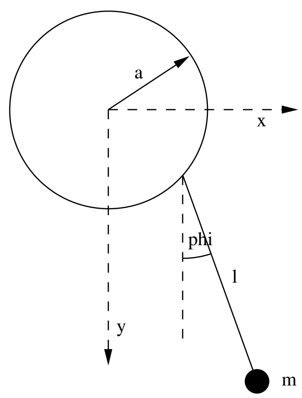
   Welche Bedingung gilt allgemein für den Absprung von der Schiene? Bei welcher Höhe H springt der Massenpunkt vom Kreisbogen ab? Wie groß ist der Winkel zwischen y-Achse und Absprungpunkt? (2 Punkte)

Aufgabe 17 : Bewegungsgleichungen im Lagrange-Formalismus (schriftlich)

Bestimmen Sie die Lagrange-Funktionen $L = T - V$ folgender Systeme, die sich im homogenen Gravitationsfeld befinden, und stellen Sie die zugehörigen Lagrange-Gleichungen auf.







a) Gekoppelte Federschwingungen (Abb. 1), wobei beide Federn masselos sind und im unbelasteten Zustand verschwindende Längen $l_0 = 0$ haben. (Vergleichen Sie das Ergebnis mit demjenigen aus Aufgabe 11.) (2 Punkte)

b) Das ebene Doppelpendel (Abb. 2). (2 Punkte)

c) Ebenes Pendel, dessen Aufhängepunkt sich entlang eines vertikalen Kreises mit konstanter Frequenz ω bewegt (Abb. 3). (2 Punkte)

Aufgabe 18 : Eigenschwingungen des Doppelpendels

Für kleine Winkel $\varphi_{1,2}$ und kleine Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\varphi}_{1,2}$ können die Bewegungsgleichungen des Doppelpendels [siehe Aufg. 17 b)] mit Hilfe der Näherungen $\sin x \approx x$, $\cos x \approx 1$ und durch Vernachlässigung aller Terme, die in $\varphi_{1,2}$ bzw. $\dot{\varphi}_{1,2}$ quadratisch sind, linearisiert werden.

a) Stellen Sie diese linearisierten Bewegungsgleichungen auf und lösen Sie diese mit Hilfe des Ansatzes $\varphi_k(t) = a_k e^{i\omega t}$ $(k = 1, 2)$. (2 Punkte)

b) Bestimmen Sie aus dem resultierenden, gekoppelten Gleichungssystem die Eigenfrequenzen ω und die entsprechenden Eigenvektoren $\boldsymbol{a}$ des Systems. Veranschaulichen Sie die Eigenschwingungen des Systems und diskutieren Sie das Auftreten der unterschiedlichen Frequenzen. (2 Punkte)

c) Welche Frequenzen ergeben sich für den Fall, dass (2 Punkte)

   i) beide Massen gleich groß $(m_1 = m_2 = m)$ und die Pendel gleich lang $(l_1 = l_2 = l)$ sind?

   ii) Die eine Masse viel größer ist als die andere $(m_2 \gg m_1)$ und beide Pendelteile gleich lang sind $(l_1 = l_2 = l)$?

Abgabe der schriftlichen Aufgabe am Montag, den 28.11. in der Vorlesung.