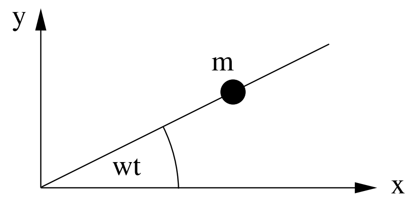
Übungen zur Vorlesung Theoretische Physik LA 1 **WS 2016/17**

Apl. Prof. Dr. J. Main **Blatt 7**

Aufgabe 23 : Teilchen in rotierendem Rohr (schriftlich)

Ein Massenpunkt m bewege sich reibungsfrei in einem Rohr, das horizontal mit ω um den Koordinatenursprung rotiert. Zum Zeitpunkt $t = 0$ liege das Rohr auf der positiven x-Achse.



a) Wie lautet die Lagrangefunktion des Systems? Lösen Sie die Bewegungsgleichung des Teilchens für die Anfangsbedingungen

$$x(t = 0) = x_0 > 0, \quad \dot{x}(t = 0) = 0.$$

Wie verhält sich die Energie des Teilchens mit der Zeit? Diskutieren Sie den scheinbaren Widerspruch zum Prinzip der virtuellen Arbeit. (2 Punkte)

b) Das Rohr habe die Länge l. Die Masse werde gestartet bei $x = \alpha\, l$, $0 < \alpha < 1$. Bei welchem Winkel $\varphi \equiv \omega t$ verlässt das Teilchen das Rohr? Wie muss α gewählt werden, damit die Masse genau dann das Rohr verlässt, wenn es zum ersten Mal in Richtung der positiven y-Achse zeigt? (1 Punkt)

c) Berechnen Sie den Betrag der Geschwindigkeit beim Verlassen des Rohres und den Winkel, unter dem das Teilchen aus dem Rohr geschleudert wird, in Abhängigkeit von α. Was erhält man für die Grenzfälle $\alpha \to 0$ und $\alpha \to 1$? (2 Punkte)

d) Bestimmen Sie die Hamiltonfunktion $H(q, p)$. Welche allgemeine Aussage kann man über H machen (vgl. Aufg. 21)? Entspricht H der Gesamtenergie des Systems? Wie lauten die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen? (2 Punkte)

Aufgabe 24 : Hamiltonfunktion des harmonischen Oszillators

Ein Teilchen der Masse m führe eine eindimensionale Bewegung in einem Potenzial $V(x) = \frac{1}{2}\, m\omega^2 x^2$ aus. Wie lautet die Hamiltonfunkion? Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen und daraus die Schwingungsgleichung für x. (3 Punkte)

Aufgabe 25 : Massenpunkt in konservativem Potenzial

Auch wenn keine Zwangskräfte vorliegen, kann es vorteilhaft sein, von kartesischen Koordinaten zu einem anderen Koordinatensystem zu wechseln. Besonders eignen sich Koordinaten, die an vorhandene Symmetrien des Systems angepasst sind.

a) Bestimmen Sie die Hamiltonfunktion für eine Masse m, die keinen Zwangskräften unterliegt und sich in einem konservativen Potenzial V bewegt. Verwenden Sie

   a) kartesische Koordinaten (x, y, z)

   b) Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z)

   c) Kugelkoordinaten (r, θ, φ) (3 Punkte)

b) Das Potenzial sei nun zylindersymmetrisch, also $V = V(\sqrt{x^2 + y^2}\,)$.

   Wie lautet somit die Hamiltonfunktion in den verschiedenen Koordinatensystemen? Finden Sie 3 Erhaltungssätze. (2 Punkte)

Aufgabe 26 : Eichinvarianz der Lagrangegleichungen

In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass man zur Lagrangefunktion eine totale Zeitableitung einer Funktion $F(q, t)$ addieren kann, ohne dass sich die zugehörigen Lagrangegleichungen ändern.

$$L(q, \dot{q}, t) \quad \longrightarrow \quad L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + L'', \qquad L'' = \frac{d}{dt} F(q, t).$$

Eine derartige, die Bewegungsgleichungen invariant lassende Transformation, bezeichnet man als Eichtransformation.

Zeigen Sie, dass gilt

$$\left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial}{\partial q} \right\} L'' = 0,$$

und dass daraus die Invarianz der Bewegungsgleichungen folgt. (3 Punkte)

Abgabe der schriftlichen Aufgabe am Montag, den 12.12. in der Vorlesung.