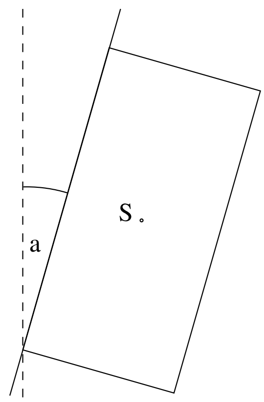
Aufgabe 27 : Schwingende Tür

Die Angeln einer Tür der Höhe h und Breite b seien unsauber angebracht, sodass die Drehachse den Winkel α zur Senkrechten einschließt.



a) Berechnen Sie das Trägheitsmoment bezüglich der Drehachse. (1 Punkt)

b) Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf. Die Tür kann Schwingungen um die Ruhelage ausführen; bestimmen Sie deren Frequenz für kleine Ausschläge. Wie ist die Länge eines äquivalenten mathematischen Pendels? Wie groß ist die Schwingungsdauer für eine Tür der Breite 80 cm mit $\alpha = 5°$. (3 Punkte)

Aufgabe 28 : Hauptträgheitsachsen

a) Berechnen Sie den Trägheitstensor eines Rechtecks ($0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$) für Drehungen um den Koordinatenursprung. (2 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Hauptträgheitsachsen und Hauptträgheitsmomente für $a = b$. Wie lautet der Trägheitstensor im Hauptachsensystem? (3 Punkte)

Aufgabe 29 : Stabilität freier Rotationsachsen

Für die Drehbewegung eines starren Körpers gelten die Eulerschen Gleichungen

$$\begin{aligned}
I_1\,\dot\omega_1 - (I_2 - I_3)\,\omega_2\,\omega_3 &= N_1, \\
I_2\,\dot\omega_2 - (I_3 - I_1)\,\omega_3\,\omega_1 &= N_2, \\
I_3\,\dot\omega_3 - (I_1 - I_2)\,\omega_1\,\omega_2 &= N_3.
\end{aligned}$$

Dabei sind ω_i und N_i die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit und des Drehmoments in einem körperfesten Koordinatensystem, das durch die Hauptträgheitsachsen aufgespannt wird, I_i sind die entsprechenden Hauptträgheitsmomente.

a) Zeigen Sie, dass für einen kräftefreien Kreisel eine Rotationsbewegung um eine Hauptträgheitsachse mit $\omega = \text{const}$ eine mögliche Lösung darstellt. (1 Punkt)

b) Führen Sie nun kleine Störungen $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \ll \omega$ ein und linearisieren Sie die Eulerschen Bewegungsgleichungen. Zeigen Sie, dass für einen unsymmetrischen Kreisel (d. h. $I_1 \neq I_2 \wedge I_1 \neq I_3 \wedge I_2 \neq I_3$) die Rotation um die Achse mit dem mittleren Trägheitsmoment instabil ist, Rotationen um die beiden anderen Achsen dagegen stabil. (3 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass bei einem kräftefreien symmetrischen Kreisel die Rotation um die Figurenachse stabil ist.

   Hinweis: Verwenden Sie *nicht* die Linearisierung aus b). Die Eulerschen Gleichungen können exakt gelöst werden. (2 Punkte)

Aufgabe 30 : Eigenwerte und -vektoren symmetrischer Matrizen (schriftlich)

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ kann als lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^n &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ \boldsymbol{x} &\longmapsto \boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

aufgefasst werden. In diesem existiere weiterhin das hermitesche Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ mit der Eigenschaft $\langle a, b\rangle = \langle b, a\rangle^*$. Ein Vektor $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{C}^n$ heißt dann Eigenvektor zum Eigenwert λ, wenn dieser die Gleichung

$$A\boldsymbol{x}_0 = \lambda\boldsymbol{x}_0$$

erfüllt.

a) Verifizieren Sie, dass das charakteristische Polynom $\chi(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbb{1})$ verschwindet, $\chi(\lambda) = 0$, wenn λ ein Eigenwert von A ist. (1 Punkt)

b) Sei A nun eine reelle, symmetrische Matrix ($A = A^T$). Beweisen Sie, dass die zugehörigen Eigenwerte *reell* sind und dass Eigenvektoren $\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j$ zu *unterschiedlichen* Eigenwerten $\lambda_i \neq \lambda_j$ orthogonal sind. (2 Punkte)

   Hinweis: Verwenden Sie einen auf $\|\boldsymbol{x}_0\| = 1$ normierten Eigenvektor. Damit lässt sich der entsprechende Eigenwert als $\lambda = \langle A\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_0\rangle$ schreiben. Beachten Sie, dass symmetrische Matrizen selbstadjungiert sind, d.h. $\langle A\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_0\rangle = \langle \boldsymbol{x}_0, A\boldsymbol{x}_0\rangle$. Betrachten Sie zum Beweis der Orthogonalität das Skalarprodukt $\langle A\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j\rangle$.

c) Verifizieren Sie obige Ergebnisse für den Spezialfall der symmetrischen 2×2-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

   mit $a, b, c \in \mathbb{R}$, indem Sie deren Eigenwerte und -vektoren explizit bestimmen. (2 Punkte)

Abgabe der schriftlichen Aufgabe am Montag, den 19.12. in der Vorlesung.