
Aufgabe 38 : Darstellungstheorie **(schriftlich)**

Ein unitärer Vektorraum werde von einer Basis $\{|\alpha_\nu\rangle\}$ aufgespannt (Vollständigkeitsrelation: $\sum_\nu |\alpha_\nu\rangle \langle\alpha_\nu| = \hat{1}$, Orthonormalität: $\langle\alpha_\mu|\alpha_\nu\rangle = \delta_{\mu\nu}$).

a) Geben Sie die Darstellung eines Vektors $|\psi\rangle$ in dieser Basis an. (1 Punkt)

b) Transformieren Sie den in **a)** gewonnenen Ausdruck auf eine neue Basis $\{|\beta_\nu\rangle\}$ ($\sum_\nu |\beta_\nu\rangle \langle\beta_\nu| = \hat{1}$, $\langle\beta_\mu|\beta_\nu\rangle = \delta_{\mu\nu}$). (1 Punkt)

Hinweis: : Verwenden Sie die Vollständigkeitsrelation.

c) Stellen Sie nun das Skalarprodukt $\langle\psi \mid \hat{Q} \mid \psi\rangle$ (Erwartungswert des Operators $\hat{Q}$) zuerst in der Basis $\{|\alpha_\nu\rangle\}$ dar, transformieren Sie auf die Basis $\{|\beta_\nu\rangle\}$ und zeigen Sie, dass das Skalarprodukt erhalten bleibt. (2 Punkte)

Aufgabe 39 : Operatoralgebra

a) Das dyadische Produkt zweier Vektoren $|u\rangle$, $|v\rangle$ ist ein Operator $\hat{Q} = |u\rangle \langle v|$.

- Wie lautet der zu $\hat{Q}$ adjungierte Operator $\hat{Q}^\dagger$?
- Zeigen Sie, dass $\hat{P} = |u\rangle \langle u|$ hermitesch und unter der Bedingung $\langle u|u\rangle = 1$ idempotent ($\hat{P}^2 = \hat{P}$) ist.
- Zeigen Sie, dass $\hat{P}$ damit die Eigenschaften eines Projektionsoperators erfüllt: $\hat{P}|u\rangle = 1\,|u\rangle$ und $\hat{P}|v\rangle = 0\,|v\rangle$, wenn $|v\rangle \perp |u\rangle$. (3 Punkte)

b) Zerlegen Sie die folgenden Ausdrücke in Faktoren $(\alpha\hat{A})^\dagger, (\alpha\hat{A})^{-1}$. Zeigen Sie

- $(\hat{A}^{-1})^\dagger = (\hat{A}^\dagger)^{-1}$
- $\hat{U} = \hat{1} + \mathrm{i}\epsilon\hat{H}$ ($0 < \epsilon \ll 1$, lineare Näherung, $\hat{H}$ hermitesch) ist unitär.
- $\mathrm{i}\left[\hat{A}, \hat{B}\right]$ ist hermitesch, wenn $\hat{A}$, $\hat{B}$ hermitesch sind.
- $\left[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}\right] = \hat{A}\left[\hat{B}, \hat{C}\right] + \left[\hat{A}, \hat{C}\right]\hat{B}$ (3 Punkte)

c) Es gelten die Kommutatorrelationen $\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] = 1$, $[\hat{a}, \hat{a}] = 0 = \left[\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger\right]$. Vereinfachen Sie die folgenden Kommutatoren so weit wie möglich:

- $\left[\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}^\dagger\right]$
- $\left[\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger\right]$
- $\left[\hat{a}^\dagger \hat{a}, (\hat{a}^\dagger + \hat{a})\right]$ (3 Punkte)

Aufgabe 40 : Verallgemeinerte Unschärferelation

a) Beweisen Sie für zwei beliebige Zustände $|\alpha\rangle$ und $|\beta\rangle$ eines Hilbert-Raumes die Schwarzsche Ungleichung

$$\langle\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\beta\rangle \geq \left|\langle\alpha|\beta\rangle\right|^2$$

Hinweis: Zerlegen Sie zunächst $|\beta\rangle$ in Komponenten parallel und senkrecht zu $|\alpha\rangle$ und berechnen Sie dann $\langle\beta|\beta\rangle$. (2 Punkte)

b) Die Operatoren $\hat{a}$ und $\hat{b}$ seien hermitesch. Zeigen Sie, dass die Operatoren $\mathrm{i}\,[a, b]_- = \mathrm{i}\,(\hat{a}\hat{b} - \hat{b}\hat{a})$ und $[a, b]_+ = \hat{a}\hat{b} + \hat{b}\hat{a}$ ebenfalls hermitesch sind. (Sie besitzen somit reelle Erwartungswerte.) (1 Punkt)

c) Setzen Sie nun $\hat{a} = \hat{A} - \langle\hat{A}\rangle\,\hat{1}$ und $\hat{b} = \hat{B} - \langle\hat{B}\rangle\,\hat{1}$, wobei $\hat{A}$ und $\hat{B}$ hermitesche Operatoren sind. Zeigen Sie, dass auch die Operatoren $\hat{a}$ und $\hat{b}$ hermitesch sind und $[a, b] = [A, B]$ gilt. Beweisen Sie mithilfe der Ergebnisse aus den Teilaufgaben **a)** und **b** die verallgemeinerte Unschärferelation

$$\Delta A\,\Delta B \geq \frac{1}{2}\left|\left\langle\left[\hat{A}, \hat{B}\right]\right\rangle\right|$$

mit $(\Delta A)^2 \equiv \langle a^2\rangle = |\hat{a}\psi|^2$ und $(\Delta B)^2 \equiv \langle b^2\rangle = |\hat{b}\psi|^2$. (2 Punkte)

Abgabe der schriftlichen Aufgabe am Montag, den 23.1.2017 in der Vorlesung.