
Aufgabe 20 : Hertzscher Dipol

Bei einem harmonisch schwingenden Dipol $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_0 \sin[\omega(t - r/c)]$ gilt für das Vektorpotential $\boldsymbol{A} = \mu_0 \dot{\boldsymbol{p}}/(4\pi r)$.

a) Bestimmen Sie das skalare Potential ϕ aus der Lorentz-Eichung $\operatorname{div} \boldsymbol{A} + \epsilon_0 \mu_0 \dot{\phi} = 0$ und diskutieren Sie qualitativ die physikalischen Ursachen der zwei auftretenden Terme ($\sim \dot{\boldsymbol{p}}$ und $\sim \boldsymbol{p}$). (1.5 Punkte)

b) Bestimmen Sie aus $\boldsymbol{A}$ und ϕ das elektrische sowie das magnetische Feld. Zeigen Sie, dass das Magnetfeld immer transversal zum radialen Einheitsvektor $\hat{\boldsymbol{e}}_r$ polarisiert ist, während das elektrische Feld sowohl longitudinale als auch transversale Komponenten besitzt. Bringen Sie hierfür die Felder auf folgende Form:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= f(r,t)\,(\hat{\boldsymbol{e}}_r \times (\boldsymbol{p}_0 \times \hat{\boldsymbol{e}}_r)) + g(r,t)\,(3\,(\boldsymbol{p}_0 \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_r)\,\hat{\boldsymbol{e}}_r - \boldsymbol{p}_0) \\ \boldsymbol{B} &= h(r,t)\,(\boldsymbol{p}_0 \times \hat{\boldsymbol{e}}_r) \end{aligned}$$

Hinweis: Verwenden Sie den Nabla-Operator in Kugelkoordinaten sowie Identitäten aus Aufgabe 4 und $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\,\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c}$. (2.5 Punkte)

c) Approximieren Sie $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ im Nahfeldbereich ($r \ll \lambda = 2\pi c/\omega$) und im Fernfeldbereich ($r \gg \lambda$). Welche Beziehung gilt zwischen $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ im Fernfeld? (1 Punkt)

d) Berechnen sie den Poyntingvektor $\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$ und bestimmen Sie die mittlere abgestrahlte Energie

$$E = \frac{1}{T} \int_0^T \mathrm{d}t \int_{\partial V} \boldsymbol{S} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{f}$$

im Fernfeld durch eine große Kugelfläche mit dem Radius R. (2 Punkte)

Aufgabe 21 : Lorentztransformation / Vierervektoren- und tensoren (schriftlich)

Eine Lorentztransformation in das Bezugssystem K', das sich mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v} = v\hat{\boldsymbol{e}}_x$ relativ zum Bezugssystem K bewegt ist gegeben durch

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad \text{mit} \quad x^\nu = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sowie den Abkürzungen $\beta = v/c$ und $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$.

a) Zeigen Sie, dass die Größe $s^2 = c^2t^2 - \boldsymbol{x}^2$ unter Lorentz-Transformation invariant bleibt. (1 Punkt)

b) Zeigen Sie, dass zwei Lorentz-Transformationen in x–Richtung durch eine neue Lorentz-Transformation ersetzt werden können. Wie addieren sich zwei Geschwindigkeiten v_{x_1},v_{x_2}? Was ergibt sich für Licht, d.h. $v_{x_1} = v_{x_2} = c$? (2 Punkte)

c) Wie lautet eine Lorentz-Transformation in y–Richtung? Zeigen Sie, dass zwei Lorentz-Transformationen in verschiedene Richtungen (zum Beispiel in die x– und y–Richtung) nicht kommutieren. (1 Punkt)

d) Definieren Sie mit Hilfe der Eigenzeit τ die Vierergeschwindigkeit $u^\mu = \mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}\tau = \gamma\,\mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}t$ und die Viererbeschleunigung $b^\mu = \mathrm{d}u^\mu/\mathrm{d}\tau$. Zeigen Sie, dass das Skalarprodukt $u_\mu u^\mu$ konstant ist. (1 Punkt)

e) Als Verallgemeinerung von Vierervektoren x^μ, die unter Lorentztransformationen gemäß $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu\, x^\nu$ transformieren, definiert man Vierertensoren $\Gamma^{\mu\nu}$ durch ihr Transformationsverhalten $\Gamma'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha\, \Lambda^\nu_\beta\, \Gamma^{\alpha\beta}$. Zeigen Sie: Ist $\Gamma^{\mu\nu} a_\mu a_\nu$ für beliebige Vierervektoren $\{a_\nu\}$ ein Skalar, dann ist $\Gamma^{\mu\nu}$ ein Vierertensor. (1 Punkt)

Aufgabe 22 : Stange-Haus-Experiment

Eine Stange der Länge L bewege sich mit großer Geschwindigkeit durch ein Haus derselben Länge L. Zu klären ist das folgende Paradoxon:

Vom Ruhesystem des Hauses aus betrachtet erfährt die Stange eine Längenkontraktion. Wenn das Ende der Stange den Hauseingang passiert, hat ihr Ende den Hinterausgang noch nicht erreicht. Die Stange befindet sich also für eine gewisse Zeit vollständig innerhalb des Hauses. Vom Ruhesystem der Stange aus betrachtet erscheint die Länge des Hauses verkürzt. Die beiden Enden der Stange schauen für eine gewisse Zeit auf beiden Seiten des Hauses heraus.

Bezeichnen Sie mit K das Ruhesystem des Hauses und mit K' das der Stange. Die Anfangspunkte von Haus und Stange sollen für $t = t' = 0$ im Ursprung zusammenfallen. Berechnen Sie die Koordinaten von Anfangs- und Endpunkt des Hauses sowie der Stange

a) vom Ruhesystem des Hauses aus betrachtet (für beliebige Zeit t), (2 Punkte)

b) vom Ruhesystem der Stange aus betrachtet (für beliebige Zeit t'), (2 Punkte)

c) Zeichnen Sie die Raum-Zeit-Diagramme für die Weltlinien der Anfangs- und Endpunkte von Haus und Stange im System K und im System K'. (2 Punkte)

Abgabe der schriftlichen Aufgabe am Dienstag, den 30.5.2017, in der Übung.
Besprechung der Aufgaben am Dienstag, den 13.6.2017, in der Übung.