Übungen zur Vorlesung „Mathematische Methoden der Physik”
Wintersemester 2016/17

Übungsblatt 5

Ausgabe:	Donnerstag, 10. November 2016
Abgabe der schriftlichen Lösungen:	Donnerstag, 17. November 2016
Besprechung:	23./24./25. November 2016

Aufgabe 15: Weitere Übungen mit komplexen Zahlen (schriftlich)

a) Vereinfachen Sie folgende Kombinationen der komplexen Zahlen $z = 3 + 4\mathrm{i}$ und $w = 2 - \mathrm{i}$:

$$z + w\ , \quad w - z\ , \quad wz\ , \quad \bar{z}w + \bar{w}z$$

(4 Punkte)

b) Geben Sie alle Zahlen an, die hier als mögliche Lösungen des (vieldeutigen) Exponenten 1/2 in Frage kommen:

$$(-1 + \sqrt{3}\mathrm{i})^{1/2}\ , \quad |\exp(\mathrm{i}^{1/2})|$$

(4 Punkte)

c) Berechnen Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen und tragen Sie sie in einem Diagramm in die komplexe Ebene ein:

$$z^2 = \mathrm{i}\ , \quad z^8 = 256\ , \quad z^3 - 3z^2 + 4z = 2$$

(8 Punkte)

Aufgabe 16: Riemannsche Blätter (schriftlich)

a) Geben Sie alle Lösungen der Gleichung

$$z^3 = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = w$$

an. Zeichnen Sie nun für $r = 1$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$, welche Linien sich für w und die Lösungen z ergeben. Zeichnen Sie jeweils für die w- und für die z-Ebene ein eigenes Diagramm. (2 Punkte)

b) Greifen Sie nun eine der vieldeutigen Lösungen für z heraus. In welchem Intervall müssen Sie φ variieren, damit sich die Linie für diese Lösung schließt? Wie viele Riemannsche Blätter benötigen Sie für die Eindeutigkeit der zugehörigen w-Werte? (2 Punkte)

c) Skizzieren Sie, wie eine passende Aufteilung der z-Ebene aussehen könnte, damit alle Punkte innerhalb eines Teils der z-Ebene zu genau einem Riemannschen Blatt der w-Ebene gehören.

(2 Bonuspunkte)

Aufgabe 17: Trigonometrische Funktionen (Votieraufgabe)

Mit den Exponentialdarstellungen

$$\sin(x) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}) \;, \quad \cos(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})$$

können die Additionstheoreme für die trigonometrischen Funktionen elegant hergeleitet werden.

a) Zeigen Sie, dass die folgenden Beziehungen gelten:

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \tag{1}$$

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \tag{2}$$

$$\sin(3x) = -4\sin^3(x) + 3\sin(x) \tag{3}$$

(9 Punkte)

b) Berechnen Sie unter Ausnutzung der Gleichungen (1) und (2) den Real- und den Imaginärteil von $\cos(z)$ und $\sin(z)$ für $z = x + \mathrm{i}y$. (2 Bonuspunkte)

c) Lösen Sie die Gleichung $y^3 - 6y + 1 = 0$ unter Verwendung der Substitution $y = 2\sqrt{2}\sin(x)$ und mit Hilfe von Gleichung (3). Geben Sie numerische Zahlenwerte für die drei Lösungen an. (4 Punkte)

d) Beweisen Sie, dass $\cot(\pi/12) = 2 + \sqrt{3}$ gilt, indem Sie die komplexe Zahl $\exp(\mathrm{i}\pi/12)$ betrachten. Verwenden Sie $\pi/12 = \pi/3 - \pi/4$, um sie explizit angeben zu können. (2 Bonuspunkte)

Aufgabe 18: Harmonischer Oszillator (Votieraufgabe)

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t) + Dx(t) = 0 \tag{4}$$

eines Federpendels mit der Masse m und der Federkonstanten D. Sie ist ein Standardbeispiel für den harmonischen Oszillator.

a) Zeigen Sie, dass Sie mit dem Ansatz $x(t) = x_0\exp(\lambda t)$ zwei Lösungen dieser Differentialgleichung finden können. Welche Werte ergeben sich dabei für λ? Wie lauten die beiden zugehörigen Lösungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$? (3 Punkte)

b) Die Differentialgleichung (4) ist linear, d.h. auch jede Superposition $x(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$ mit beliebigen komplexen Zahlen a und b löst sie. Zeigen Sie, dass Sie durch eine geschickte Wahl von a und b zwei unabhängige, rein reelle Lösungen $x_\mathrm{I}(t)$ und $x_\mathrm{II}(t)$ von (4) angeben können. (3 Punkte)

c) Lesen Sie aus Ihren Lösungen die Kreisfrequenz ω der Schwingung ab. (1 Punkt)