Übungen zur Vorlesung „Mathematische Methoden der Physik"
Wintersemester 2016/17

Übungsblatt 6

Ausgabe:	Donnerstag, 17. November 2016
Abgabe der schriftlichen Lösungen:	Donnerstag 24. November 2016
Besprechung:	30. November/1./2. Dezember 2016

Aufgabe 19: Einfache Differentialgleichungen 1. Ordnung (schriftlich)

Suchen Sie die Lösungen der folgenden Differentialgleichungen zu den gegebenen Anfangsbedingungen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x) + xy(x) = 0, \quad y(0) = 1 \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x) + 2xy(x) = 4x, \quad y(0) = 1 \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x) - xy(x)^2 = 0, \quad y(0) = 1 \tag{3}$$

(10 Punkte)

Aufgabe 20: Bernoulli-Differentialgleichung (schriftlich)

Die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x) + \frac{y(x)}{x} = 2x^3 y(x)^4$$

hat die Bernoulli-Form. Bilden Sie sie mit der Substitution $z(x) = y(x)^{-3}$ auf eine lineare Differentialgleichung ab und lösen Sie diese. Geben Sie die Lösung $y(x)$ an und vergewissern Sie sich durch Einsetzen, dass sie tatsächlich die Differentialgleichung löst. (10 Punkte)

Aufgabe 21: Eine Differentialgleichung für das Universum (Votieraufgabe)

Unter der Annahme eines homogenen und isotropen Universums, das mit wechselwirkungsfreier Materie gefüllt ist, kann man seine zeitliche Entwicklung auf die eines einzigen Skalenparameters $a(t)$ zurückführen. Dabei beschreibt $a(t)$ die Ausdehnung des Universums. Aus den Einsteinschen Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie folgt unter den genannten Voraussetzungen eine gewöhnliche Differentialgleichung:

$$\dot{a}(t)^2 - \frac{8}{3}\pi \mathrm{G}\frac{M}{a(t)} = -q\mathrm{c}^2 \tag{4}$$

In dieser Gleichung sind G die Gravitationskonstante, M eine Konstante der Dimension einer Masse und c die Lichtgeschwindigkeit. Der Wert von q kann $+1$, 0 oder -1 betragen und legt die Krümmung des Raumes fest.

a) Lösen Sie die Differentialgleichung (4) für den Fall eines flachen Universums ($q = 0$) mit der Anfangsbedingung $a(0) = 0$, d.h. einer verschwindenden Ausdehnung zum Zeitpunkt $t = 0$, dem „Urknall“ oder „Big Bang“. Überprüfen Sie Ihre Lösung durch Einsetzen in die Differentialgleichung. (5 Punkte)

b) Der Fall $q = +1$ beschreibt ein Universum mit konstanter positiver Krümmung (Eine Kugel hat z.B. eine positive Krümmung). Führen Sie die Abkürzung $a_0 = 4\pi \mathrm{G}M/(3\mathrm{c}^2)$ ein und lösen Sie die Differentialgleichung mit $q = +1$ unter Verwendung der Substitution

$$a = a_0(1 - \cos(\eta)) \ . \tag{5}$$

Eine geschlossene Lösung der Form $a(t) = \ldots$ kann nicht angegeben werden. Sie erhalten aber aus der Integration der Differentialgleichung ein Ergebnis $t(\eta)$, das gemeinsam mit Gleichung (5) eine Parameterdarstellung der Lösung mit dem Parameter η bildet. Verwenden Sie wieder die Anfangsbedingung $a(0) = 0$. (10 Punkte)

c) Skizzieren Sie die beiden Lösungen aus dieser Aufgabe in einem gemeinsamen a-t-Diagramm und diskutieren Sie das Schicksal des Universums in Abhängigkeit von seiner Krümmung. (5 Punkte)

Anmerkung: Die oben getroffenen Annahmen scheinen zunächst sehr drastisch und wirklichkeitsfremd zu sein. Ein Blick in den Sternenhimmel reicht aus, um zu erkennen, dass das Universum aus unserer Sicht weder homogen (kein Punkt ist ausgezeichnet) noch isotrop (keine Richtung ist ausgezeichnet) ist. Die Forderung eines homogenen und isotropen Universum, die unter dem Namen „kosmologisches Prinzip“ bekannt ist, ist jedoch ab einer Längenskala von 10^8 Lichtjahren gut erfüllt. Wenn wir die Entwicklung des Universums als Ganzes im Blick haben, reichen Betrachtungen auf dieser Längenskala aus. Das Bild ist trotzdem nicht vollständig. Heutige experimentelle Beobachtungen legen nahe, dass wir ein einem Universum leben, das nur durch eine erweiterte Gleichung mit der kosmologischen Konstanten Λ (gerne auch „dunkle Energie“ genannt) in der Form

$$\dot{a}(t)^2 - \frac{8}{3}\pi \mathrm{G}\frac{M}{a(t)} - \frac{\Lambda}{3}\mathrm{c}^2 a(t)^2 = -q\mathrm{c}^2$$

beschrieben werden kann. Diese lässt sich allerdings nur in Spezialfällen analytisch lösen und auch diese Sonderfälle sind nicht für den Einstieg in das Thema Differentialgleichungen geeignet.