Übungen zur Vorlesung „Mathematische Methoden der Physik"
Wintersemester 2015/16

Übungsblatt 7

Ausgabe: Donnerstag, 24. November 2016
Abgabe der schriftlichen Lösungen: Donnerstag, 1. Dezember 2016
Besprechung: 7./8./9. Dezember 2016

Aufgabe 22: Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung (schriftlich)

Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen folgender Differentialgleichungen:

a)

$$u'' + u' + u = c\,, \quad c \in \mathbb{R}$$

(4 Punkte)

b)

$$u''' - 3u'' + 4u' - 2u = 0.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 23: Zwei spezielle Differentialgleichungen (schriftlich)

a) Zeigen Sie, dass sich die Differentialgleichung

$$ax^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} y(x) + bx \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y(x) + cy(x) = 0 \tag{1}$$

mit dem Ansatz $y = x^\nu$ lösen lässt. Bestimmen Sie ν in Abhängigkeit von a, b und c. (2 Punkte)

b) Welche Lösung von Gleichung (1) findet man für $a = 1$, $b = 3$ und $c = 1$ mit dem Vorgehen aus Teil a)? (1 Punkt)

c) Substituieren Sie in der Differentialgleichung (1) mit der Wahl der Konstanten aus b).

$$x = e^z, \qquad \text{woraus folgt} \quad x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}, \quad x^2 \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}z^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}$$

und bestimmen Sie *zwei* Lösungen $y(z)$ der daraus resultierenden Differentialgleichung. Welche Lösungen $y(x)$ ergeben sich? Warum wird mit dem Vorgehen aus a) und b) nur eine dieser Lösungen gefunden? (4 Punkte)

d) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x) = \frac{y(x)}{x} + \tan\left(\frac{y(x)}{x}\right) \tag{2}$$

durch $y(x) = x \arcsin(ax)$ gelöst wird. (2 Punkte)

e) Verwenden Sie den Ansatz $y(x) = xv(x)$ und bestimmen Sie eine Lösung $v(x)$ der Differentialgleichung (2). Erhält man so die Lösung aus Teil d)? (3 Punkte)

Aufgabe 24: Getriebener und gedämpfter harmonischer Oszillator (Votieraufgabe)

In Aufgabe 18 haben Sie schon die Differentialgleichung des harmonischen Oszillators kennen gelernt. Zu diesem fundamentalen Modellsystem, das in der Physik vielfach angewandt wird, wollen wir ein paar weitere Betrachtungen anstellen.

a) Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \mathrm{e}^{-\Gamma t}$$

des harmonischen Oszillators mit der treibenden Kraft $\mathrm{e}^{-\Gamma t}$, d.h. geben Sie die allgemeine Lösung an. Verwenden Sie dabei Ihr Wissen über die Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung aus Aufgabe 18. (3 Punkte)

b) Bestimmen Sie für Ihre Lösung das Randwertproblem mit den Bedingungen $x(0) = 0$ und $x(T) = 0$. Bestimmen Sie die Zeiten T, für die keine wohldefinierte Lösung des Randwertproblems existiert. (3 Punkte)

c) Berechnen Sie die Lösungen des gedämpften harmonischen Oszillators

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0 \ ,$$

wobei wir nur von einer positiven Dämpfung $\gamma > 0$ und der sinnvollen Festlegung $\omega > 0$ ausgehen. Unterscheiden Sie in Abhängigkeit von einer Beziehung zwischen γ und ω drei Bereiche, in denen die Lösungen der Differentialgleichung grundlegend verschiedene Bewegungen beschreiben. Geben Sie die Lösungen an. (6 Punkte)

d) Lösen Sie für $\omega = 2/5$ und jeweils für $\gamma = 1/2$ und $\gamma = 2/5$ das Anfangswertproblem $x(0) = 1$ und $\dot{x}(0) = 0$. Skizzieren Sie Ihre Lösungen und einem x-t-Diagramm und diskutieren Sie diese. (4 Punkte)

e) Wiederholen Sie Ihre Betrachtungen aus Teil d) für das Anfangswertproblem $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 1$. (4 Punkte)