Übungen zur Vorlesung „Mathematische Methoden der Physik”
Wintersemester 2016/17

Übungsblatt 10

Ausgabe:	Donnerstag, 15. Dezember 2016
Abgabe der schriftlichen Lösungen:	Donnerstag, 22. Dezember 2016
Besprechung:	11./12./13. Januar 2017

Aufgabe 32: Ableitungen in ebenen Polarkoordinaten (schriftlich)

Ebene Polarkoordinaten entsprechen Zylinderkoordinaten, bei denen die z-Richtung nicht existiert, d.h. sie bestehen aus den Koordinaten r und φ, die über $x = r\cos(\varphi)$ und $y = r\sin(\varphi)$ mit x und y verknüpft sind.

a) Betrachten Sie die Funktion
$$f(x, y) = x \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right)$$
und berechnen Sie die Ableitung
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f(x, y) \, .$$
(3 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass für eine beliebige Funktion g die Transformation der Ableitung
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) g(x, y) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right) g(x(r, \varphi), y(r, \varphi))$$
lautet. (7 Punkte)

c) Transformieren Sie nun die Funktion f auf ebene Polarkoordinaten $\hat{f}(r, \varphi) = f(x(r, \varphi), y(r, \varphi))$ und berechnen Sie die oben angegebene Ableitung für $\hat{f}$ explizit in ebenen Polarkoordinaten.
(3 Punkte)

d) Transformieren Sie Ihr Ergebnis aus Teil c) zurück in kartesische Koordinaten. Ist es mit dem Ergebnis aus Teil a) identisch? (2 Punkte)

Aufgabe 33: Volumen eines Kegels (schriftlich)

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass das Volumen eines Kegels durch das Berechnen des dreifachen Integrals
$$V = \int_0^h \mathrm{d}z \int_{-r(z)}^{r(z)} \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{r(z)^2 - y^2}}^{\sqrt{r(z)^2 - y^2}} \mathrm{d}x \, 1 \qquad \text{mit } r(z) = R\left(1 - \frac{z}{h}\right)$$

bestimmt werden kann. Zeigen Sie, dass Sie durch das Lösen der Integrale in x und y auf

$$V = \pi \int_0^h \mathrm{d}z \, r(z)^2$$

kommen. Freuen Sie sich darüber, dass Sie jetzt die Formel zum Berechnen der Volumina von Rotationskörpern, die Sie hoffentlich in der Schule kennen gelernt haben, verstehen. Führen Sie anschließend die Integration in z aus und geben Sie das Ergebnis an. (5 Punkte)

Aufgabe 34: Gebietsintegrale (Votieraufgabe)

a) Integrieren Sie

$$\int_A e^{x+y} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \ ,$$

wobei A das Dreieck mit den Ecken $(x = 0, y = 0)$, $(0, 3)$ und $(1, 0)$ sei. Fertigen Sie zuvor eine Skizze an, in der Sie das Integrationsgebiet in der x-y-Ebene darstellen. (3 Punkte)

b) Gehen Sie bei dem Integral

$$\int_{A'} xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

und dem Gebiet A', das von der Parabel $y = x^2$ und der Geraden durch die Punkte $(-1, 1)$ und $(2, 4)$ eingeschlossen wird, wie in Teil a) vor. (4 Punkte)

c) Berechnen Sie das Volumen des D-dimensionalen Gebietes

$$A_D = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^D | 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_D \leq 1 \right\} \ .$$

(5 Punkte)

Aufgabe 35: Trägheitsmoment einer Pyramide (Votieraufgabe)

Eine gerade Pyramide habe eine rechteckige Grundfläche mit den Kantenlängen a und b sowie die Höhe h. Ihre homogene (d.h. nicht vom Ort abhängige) Massendichte sei ϱ.

a) Die Grundfläche der Pyramide soll auf der x-y-Ebene liegen. Stellen Sie die Pyramide so in ein kartesisches Koordinatensystem, dass ihre Spitze (und damit auch der Mittelpunkt der Grundfläche) durch die z-Achse geht und geben Sie eine geeignete Wahl der Integrationsgrenzen für eine Integration über das Volumen V der Pyramide an. (3 Punkte)

b) Berechnen Sie das Trägheitsmoment

$$I = \int_V \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \, (x^2 + y^2) \, \varrho \ ,$$

für eine Rotation der Pyramide um die z-Achse. (5 Punkte)