Übungen zur Vorlesung „Mathematische Methoden der Physik"
Wintersemester 2016/17

Übungsblatt 14
Ausgabe: Donnerstag, 26. Januar 2017
Abgabe der schriftlichen Lösungen: Donnerstag, 2. Februar 2017
Besprechung: 8./9./10. Februar 2017

Aufgabe 47: Differentialoperatoren in Zylinder- und Kugelkoordinaten (schriftlich)

a) Folgende Funktionen sind in Zylinderkoordinaten (ϱ, φ, z) gegeben. Berechnen Sie jeweils den Gradienten ∇f und Δf in Zylinderkoordinaten.

$$f_1 = a\varrho^2 + bz^2 \,, \qquad f_2 = \frac{a}{\varrho} \,, \qquad f_3 = a\mathrm{e}^{-b\varrho^2} \,, \qquad f_4 = \frac{x}{\varrho^2} = \frac{\cos\varphi}{\varrho}$$

(5 Punkte)

b) Folgende Funktionen sind in Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) gegeben. Berechnen Sie jeweils den Gradienten ∇f und Δf in Kugelkoordinaten.

$$f_5 = \frac{a}{r} \,, \qquad f_6 = a\frac{\mathrm{e}^{-br}}{r} \,, \qquad f_7 = \frac{z}{r^3} = \frac{\cos\vartheta}{r^2}$$

(4 Punkte)

c) Bestimmen Sie die Divergenz und die Rotation des Vektorfeldes

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \begin{pmatrix} xz \\ yz \\ z^2 \end{pmatrix}$$

unter Verwendung geeigneter Koordinaten und geben Sie das Ergebnis wieder in kartesischen Koordinaten an. (4 Bonuspunkte)

Aufgabe 48: Beispiele zu den Integralsätzen von Gauß und Stokes (schriftlich)

a) Berechnen Sie für das Vektorfeld $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$ das Oberflächenintegral I_O und das Volumenintegral I_V, wobei V das Volumen einer Kugel mit Radius R um den Ursprung und ∂V die Oberfläche dieser Kugel sind.

$$I_O = \int_{\partial V} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} \,, \quad I_V = \int_V \operatorname{div} \boldsymbol{F} \mathrm{d}V$$

Berechnen Sie beide Integrale explizit und begründen Sie, warum das eigentlich nicht nötig wäre.
(5 Punkte)

b) Berechnen Sie für den Kraftvektor $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{e}_y$ das Arbeitsintegral W für einen geschlossenen, in positiver Richtung durchlaufenen Kreis C in der x-y-Ebene um den Punkt $(2,0,0)$ mit dem Radius $R = 1$. Berechnen Sie ebenfalls das Flächenintegral W_A, wobei A die Fläche des beschriebenen Kreises ist, deren Normalenvektor in Richtung der positiven z-Achse zeigt.

$$W = \int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \ , \quad W_A = \int_A \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}$$

Berechnen Sie beide Integrale explizit. Warum überrascht Sie das Ergebnis nicht? (6 Punkte)

Aufgabe 49: Semiparabolische Koordinaten (Votieraufgabe)

Wir betrachten in dieser Aufgabe als weiteres Beispiel für ein krummliniges Koordinatensystem die semiparabolischen Koordinaten $(u_1, u_2, u_3) = (\mu, \nu, \varphi)$. Ihre Umrechnung in kartesische Koordinaten lautet mit $\mu \geq 0$ und $\nu \geq 0$: $x = \mu\nu \cos\varphi$, $y = \mu\nu \sin\varphi$, $z = \frac{1}{2}(\mu^2 - \nu^2)$.

a) Berechnen Sie die Vektoren $\boldsymbol{v}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_i}$, ihre Beträge $h_i = |\boldsymbol{v}_i|$ sowie die Basisvektoren $\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{v}_i / h_i$. (4 Punkte)

b) Bestimmen Sie den Gradienten in semiparabolischen Koordinaten und zeigen Sie, dass sich der Laplace-Operator in der Form

$$\Delta f = \frac{1}{\mu^2 + \nu^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial \mu^2} + \frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} + \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial \nu} + \left(\frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{\nu^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] f$$

darstellen lässt. (4 Punkte)

c) Transformieren Sie die Funktion

$$f(x,y,z) = \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + z}$$

in semiparabolische Koordinaten. Berechnen Sie Δf in semiparabolischen Koordinaten und transformieren Sie das Ergebnis wieder zurück in kartesische Koordinaten. (4 Punkte)

Aufgabe 50: Fourierreihen (Votieraufgabe)

a) Beweisen Sie die Relationen

$$\int_{x_0}^{x_0+L} \sin\left(\frac{2\pi k}{L} x\right) \cos\left(\frac{2\pi l}{L} x\right) \mathrm{d}x = 0 \ , \qquad \int_{x_0}^{x_0+L} \sin\left(\frac{2\pi k}{L} x\right) \sin\left(\frac{2\pi l}{L} x\right) \mathrm{d}x = \frac{L}{2}\delta_{kl}$$

aus der Vorlesung. (4 Punkte)

b) Bestimmen Sie die reelle und die komplexe Darstellung der Fourierreihe von $f(x) = 2x/L$, $-L/2 \leq x < L/2$. (4 Punkte)

c) Beweisen Sie, dass im Fall einer antisymmetrischen periodischen Funktion $f(-x) = -f(x)$ für die Koeffizienten der komplexen Darstellung ihrer Fourierreihe $c_{-k} = -c_k$ gilt. Zeigen Sie ferner, dass die Kosinus-Beiträge der reellen Darstellung verschwinden (d.h. $a_k = 0$) und die Koeffizienten der Sinus-Beiträge $b_k = 2\mathrm{i}c_k$ erfüllen. (5 Bonuspunkte)