Übungen zur Vorlesung „Nichtlineare Dynamik I“, WS 2016/17

1. Übungsblatt vom 20. Oktober 2016

Scheinkriterien: Je 50 % der Schriftlichen- und Votierpunkte, sowie Vorrechnen.
Schriftliche Abgaben sind in PDF-Form (möglichst ein Dokument) beim Tutor per Mail abzugeben. Dieses soll eventuelle Rechnungen und geforderte Diagramme enthalten und mögliche Fragen beantworten. Die zusätzliche Abgabe von Quellcode ist ebenfalls möglich, ersetzt jedoch nicht die Abgabe der Lösungen in PDF Form, sondern dient der Auffindung möglicher Fehler.

- **Tutor:** Matthias Feldmaier: matthias.feldmaier@itp1.uni-stuttgart.de

Abgabe: **27.10.2016** Besprechung: **Wird in der Vorlesung festgelegt.**

Aufgabe 1: Getriebenes ideales Pendel — schriftlich, 15 Punkte

Das periodisch getriebene ideale Pendel ($g/l = 1$) mit Dämpfung wird beschrieben durch die nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{\theta} = -\sin\theta - 2\gamma\dot{\theta} + \alpha\sin(\omega_d t)\ . \tag{1}$$

Dabei ist ω_d die Frequenz der treibenden Kraft, α beschreibt ihre Stärke.

a) Entwickeln Sie ein Programm zur numerischen Lösung dieser Differentialgleichung.
Lösungsvorschlag: Benutzen Sie das Runge-Kutta-Verfahrens 4. Ordnung. Schreiben Sie die Gleichung dazu als ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= -\sin\theta - 2\gamma\omega + \alpha\sin(\omega_d t), \\ \dot{\theta} &= \omega. \end{aligned}$$

Für ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, t)$$

lautet der Runge-Kutta-Algorithmus mit Zeitschritt Δt:

$$\begin{aligned} \vec{m}_0 &:= \vec{f}(\vec{x}, t) \\ \vec{m}_1 &:= \vec{f}(\vec{x} + \tfrac{1}{2}\,\vec{m}_0\,\Delta t, t + \tfrac{1}{2}\Delta t) \\ \vec{m}_2 &:= \vec{f}(\vec{x} + \tfrac{1}{2}\,\vec{m}_1\,\Delta t, t + \tfrac{1}{2}\Delta t) \\ \vec{m}_3 &:= \vec{f}(\vec{x} + \vec{m}_2\,\Delta t, t + \Delta t) \\ \vec{x}(t+\Delta t) &:= \vec{x}(t) + \tfrac{1}{6}\,\Delta t\,(\vec{m}_0 + 2\vec{m}_1 + 2\vec{m}_2 + \vec{m}_3)\ . \end{aligned}$$

b) Setzen Sie $\gamma = 0{,}25$, $\omega_d = 2/3$ und $\Delta t = 0{,}1$, und wählen Sie die Anfangsbedingungen $\theta(0) = 0$ und $\omega(0) = 1$. Stellen Sie für $\alpha = 0$, $\alpha = 0{,}5$, $\alpha = 1{,}2$ und $\alpha = 2{,}2$ die Auslenkung θ als Funktion der Zeit t graphisch dar. Plotten Sie außerdem das Phasenraumporträt des Pendels, d.h., tragen Sie ω über θ auf.

c) Falls die Ausschläge θ des Pendels klein sind, können Sie die Differentialgleichung (1) linearisieren. Sie erhalten die Gleichung

$$\ddot{\theta} = -\theta - 2\gamma\dot{\theta} + \alpha\sin(\omega_d t) \tag{2}$$

des getriebenen harmonischen Oszillators. Stellen Sie zusammen, was Sie über die Lösungen dieser Gleichung wissen, und vergleichen Sie mit den Ergebnissen für das nichtlineare Pendel.

Bitte wenden!

Aufgabe 2: Hopf-Bifurkation **15 Punkte**

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 + x_1\left(\mu - x_1^2 - x_2^2\right) \ , \\ \dot{x}_2 &= \quad x_1 + x_2\left(\mu - x_1^2 - x_2^2\right) \end{aligned} \tag{3}$$

mit einem reellen Parameter μ.

a) Das Gleichungssystem (3) besitzt den Fixpunkt $x_1 = x_2 = 0$. Untersuchen Sie die Stabilität dieses Fixpunktes und beschreiben Sie, wie die Eigenwerte der Jacobimatrix sich bei Variation von μ verändern.

b) Transformieren Sie das Gleichungssystem (3) auf Polarkoordinaten

$$x_1 = r\cos\varphi \ , \qquad x_2 = r\sin\varphi \ ,$$

lösen Sie es, und beschreiben Sie das Verhalten der Lösung für $t \to \infty$.