Übungen zur Vorlesung „Nichtlineare Dynamik II", SS 2017

1. Übungsblatt vom 13. April 2017

Scheinkriterien: Je 50 % der Schriftlichen- und Votierpunkte, sowie Vorrechnen.
Schriftliche Abgaben sind in PDF-Form (möglichst ein Dokument) beim Tutor per Mail abzugeben. Dieses soll eventuelle Rechnungen und geforderte Diagramme enthalten und mögliche Fragen beantworten. Die zusätzliche Abgabe von Quellcode ist ebenfalls möglich, ersetzt jedoch nicht die Abgabe der Lösungen in PDF Form, sondern dient der Auffindung möglicher Fehler.

- Matthias Feldmaier: matthias.feldmaier@itp1.uni-stuttgart.de

Abgabe: **23.04.2017** Besprechung: **26.04.2017**

Aufgabe 1: Quartisches Hénon-Heiles-Potential - Teil 1 **schriftlich, 15 Punkte**

Eine Variante des Hénon-Heiles-Systems wird beschrieben durch die Hamiltonfunktion

$$H = \frac{1}{2}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) - \frac{1}{4}\left(x^4 + y^4\right) + \frac{3}{2}x^2y^2 \ .$$

Für kleine Auslenkungen sind die Terme vierter Ordnung klein gegen die quadratischen Terme, deshalb kann man das System bei niedriger Energie als Störung des isotropen zweidimensionalen harmonischen Oszillators ansehen.

(a) Berechnen Sie den Einfluss der Terme vierter Ordnung in niedrigster Ordnung Störungstheorie.

Anleitung: Transformieren Sie die Hamiltonfunktion auf die Wirkungs-Winkel-Variablen des harmonischen Oszillators. Die erzeugende hierfür lautet:

$$F_1(x, y, \vartheta_1, \vartheta_2) = \frac{1}{2}(x^2 \cot \vartheta_1 + y^2 \cot \vartheta_2)$$

Die Frequenzen der beiden auftretenden Winkelvariablen sind gleich (Entartung). Führen Sie die neuen Winkel $\varphi_1 = \vartheta_1 - \vartheta_2$ und $\varphi_2 = \vartheta_2$ mit den zugehörigen Wirkungsvariablen I_1 und I_2 ein. In nullter Ordnung gilt dann $\dot{\varphi}_1 = 0$ und $\dot{\varphi}_2 = 1$, d.h. φ_1 ist näherungsweise konstant.

Berechnen Sie eine neue Hamiltonfunktion $\bar{H}(I_1, I_2, \varphi_1)$, indem Sie über die „schnelle" Winkelvariable φ_2 mitteln. $\bar{H}$ beschreibt näherungsweise die Dynamik von (I_1, φ_1), während I_2 in dieser Näherung konstant ist. Drücken Sie $\bar{H}$ wieder durch die ursprünglichen Variablen x, y, p_x, p_y aus.

Aufgabe 2: Quartisches Hénon-Heiles-Potential - Teil 2 **15 Punkte**

(a) In der störungstheoretischen Näherung sind $E = \bar{H}$ und I_2 Erhaltungsgrößen, das System ist also (fast-)integrabel. Die invarianten Tori sind gegeben als Schnitte der Niveauflächen von $\bar{H}$ und I_2. Berechnen Sie einen „störungstheoretischen Poincaré-Schnitt" wie folgt: Die Schnittebene sei $y = 0$. Wenn Sie einen festen Wert von I_2 vorgeben, ist p_y eine Funktion von x und p_x. Plotten Sie die Niveaulinien von $\bar{H}$.

Hinweis: Zur Integration bietet es sich an statt dem Runge-Kutta-Verfahren das Runge-Kutta-Nystrom Verfahren zu verwenden, welches explizit für die Integration von DGLs zweiter Ordnung optimiert wurde.

(b) Erstellen Sie echte Poincaré-Schnitte des Systems und vergleichen Sie mit den Ergebnissen von Aufgabenteil (b).

Bitte wenden!

Runge-Kutta-Nystrom Methode

Um eine Differentialgleichung $a = a(x,t)$ mit $a = \ddot{x}$ zu integrieren wird oft die Runge-Kutta-Nystrom methode verwendet. Hierbei handelt es sich um ein, speziell auf DGL zweiter Ordnung angepasstes, Runge-Kutta Verfahren. Der Algortihmus um neue Werte für $(x, v = \dot{x})$ nach einem Zeitschritt dt zu bestimmen lautet wie folgt:

$$
\begin{aligned}
k_i &= a\left(x(t) + dt \cdot c_i \cdot v(t) + dt^2 \cdot \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j, t + dt \cdot c_i\right) \\
x(t+dt) &= x(t) + dt \cdot v(t) + \sum_{i=1}^{3} dt^2 \cdot b_i k_i \\
v(t+dt) &= v(t) + \sum_{i=1}^{4} dt \cdot d_i \cdot k_i
\end{aligned}
$$

Koeffizienten:

c_i	a_{ij}			
0				
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{50}$			
$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{27}$	$\frac{7}{27}$		
1	$\frac{3}{10}$	$-\frac{2}{35}$	$\frac{9}{35}$	
b_i	$\frac{14}{336}$	$\frac{100}{336}$	$\frac{54}{336}$	
d_i	$\frac{14}{336}$	$\frac{125}{336}$	$\frac{162}{336}$	$\frac{35}{336}$