Übungen zur Vorlesung „Nichtlineare Dynamik II“, SS 2017

3. Übungsblatt vom 10.05.17

Scheinkriterien: Je 50 % der Schriftlichen- und Votierpunkte, sowie Vorrechnen.
Schriftliche Abgaben sind in PDF-Form (möglichst ein Dokument) beim Tutor per Mail abzugeben. Dieses soll eventuelle Rechnungen und geforderte Diagramme enthalten und mögliche Fragen beantworten. Die zusätzliche Abgabe von Quellcode ist ebenfalls möglich, ersetzt jedoch nicht die Abgabe der Lösungen in PDF Form, sondern dient der Auffindung möglicher Fehler.

- Matthias Feldmaier: matthias.feldmaier@itp1.uni-stuttgart.de

Abgabe: **21.05.17** Besprechung: **24.05.17**

Aufgabe 4: Tangentenbifurkation in Bose-Einstein-Kondensaten 15 Punkte

Bose-Einstein-Kondensate mit einer laserinduzierten attraktiven $1/r$-Wechselwirkung werden beschrieben durch die nichtlineare Gross-Pitaevskii Gleichung für eine effektive Einteilchen-Wellenfunktion (in geeigneten skalierten Einheiten)

$$\left[-\Delta + 8\pi a|\psi(\mathbf{r})|^2 - 2\int d^3r' \frac{|\psi(\mathbf{r}')|^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right]\psi(\mathbf{r}) = \mu\psi(\mathbf{r}) \tag{1}$$

mit a der Streulänge einer kurzreichweitigen Kontaktwechselwirkung und μ dem chemischen Potential. Nährerungslösungen für sphärisch symmetrische stationäre Zustände ergeben sich mit einem Gaußförmigen Variationsansatz für die (normierte) Wellenfunktion

$$\psi(r) = \frac{k^{3/2}}{\pi^{3/4}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}k^2r^2} \tag{2}$$

wobei der frei wählbarer Variationsparameter k so gewählt wird, dass die Mean-Field-Energie

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{mf}} &= \left\langle \psi \middle| -\Delta + 4\pi a|\psi(\mathbf{r})|^2 - \int d^3r' \frac{|\psi(\mathbf{r}')|^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \middle| \psi \right\rangle \\ &= \langle\psi| -\Delta |\psi\rangle + 4\pi a\int \psi^4(r)d^3r - \int \psi^2(\mathbf{r})\int \frac{\psi^2(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d^3r'd^3r \end{aligned} \tag{3}$$

ein Extremum annimmt.

a) Zeigen Sie, dass die Mean-Field-Energie (3) mit dem Variationsansatz (2) die Form

$$E_{\mathrm{mf}}(k) = \frac{3}{2}k^2 + \sqrt{\frac{2}{\pi}}ak^3 - \sqrt{\frac{2}{\pi}}k \tag{4}$$

annimmt.
Hinweis: Das Doppelintegral in (3) lässt sich in Schwerpunkt- und Relativkoordinaten $\mathbf{R} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}+\mathbf{r}')$, $\mathbf{r}_{\mathrm{rel}} = \mathbf{r}-\mathbf{r}'$ auswerten. Der Betrag der Jacobi-Determinante für diese Transformation ist 1.

b) Zeigen Sie, dass bei einer kritischen Streulänge $a_{\mathrm{cr}} = -3\pi/8$ zwei Zustände des Kondensats in einer Tangentenbifurkation entstehen. Diskutieren Sie die Stabilität der Zustände. Ist die Entstehung zweier Zustände in einer Tangentenbifurkation auch bei der Schrödingergleichung in der „normalen“ Quantenmechanik möglich? Begründen Sie Ihre Aussage.

Bitte wenden!

Aufgabe 5: Garton-Tomkins-Effekt **5 schriftliche Punkte**

Spektren des Wasserstoffatoms im Magnetfeld zeigen bei niedriger Auflösung im Bereich der feldfreien Ionisationsschwelle ($E = 0$) Resonanzen in Abständen $\Delta E \approx 1.5\,\hbar\omega_c$, wobei $\omega_c = eB/m$ die Zyklotronfrequenz des freien Elektrons im Magnetfeld ist.

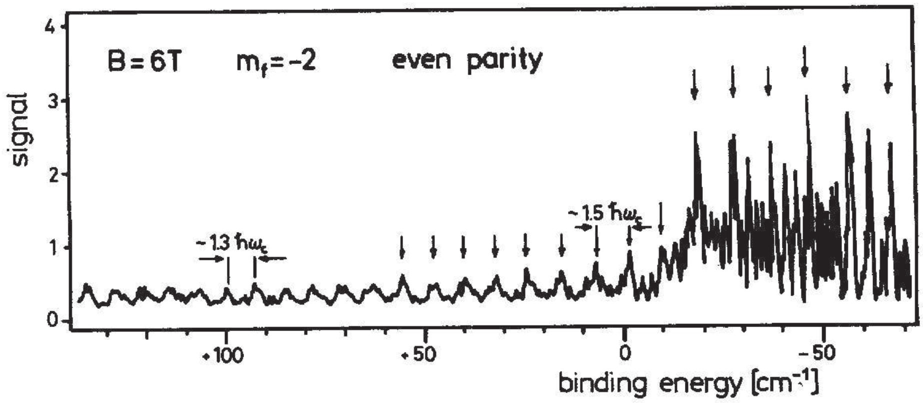

FIGURE 2 Low resolution spectrum ($\Delta\nu \approx 30$ GHz) of highly excited hydrogen atoms at magnetic field strength $B = 6$ T. The arrows indicate quasi-Landau resonances with energy spacing 1.5 $\hbar\omega_c$ at the ionization limit, slowly converging to Landau resonances with spacing $\hbar\omega_c$ at higher energies.

Diese sogenannten Garton-Tomkins-Resonanzen lassen sich semiklassisch durch eine instabile periodische Bahn in der Ebene senkrecht zum Magnetfeld erklären. Die Dynamik in dieser Ebene, also mit $z = 0$, $\rho^2 = x^2 + y^2$ und für $L_z = 0$, wird beschrieben durch die Hamiltonfunktion (in SI-Einheiten)

$$H = \frac{p_\rho^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\,\rho} + \frac{m}{8}\,\omega_c^2\rho^2 \equiv \frac{p_\rho^2}{2m} + V_{\text{eff}}(\rho)\ .$$

a) Stellen Sie das effektive Potential $V_{\text{eff}}(\rho)$ graphisch für $B = 6$ T dar. Zeigen Sie auf diese Weise, dass die Bewegung des Elektrons für jede Energie E gebunden ist. Bestimmen Sie die Umkehrpunkte ρ_1 und ρ_2 für den Fall $E = 0$ mit beliebigem B.
Hinweis: Verwenden Sie für die graphische Darstellung atomare Einheiten, d.h. $V_{\text{eff}}(\rho) = -\frac{1}{\rho} + \frac{1}{8}\,\gamma^2\rho^2$ mit $\gamma = \frac{B}{B_0}$ und $B_0 = 2.35$ T.

b) Zeigen Sie: Die Periodendauer T der Bahn senkrecht zum Magnetfeld beträgt bei $E = 0$

$$T = \frac{2\pi}{\frac{3}{2}\omega_c}\ .$$

Dies entspricht einem charakteristischen Energieabstand von

$$\Delta E = \frac{h}{T} = \frac{3}{2}\hbar\omega_c\ ,$$

also gerade den Garton-Tomkins-Oszillationen.

Hinweis:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{1-x^3}} = \frac{\pi}{3}\ .$$

Aufgabe 6: Methode der stationären Phase (Teil 1) **5 schriftliche Punkte**

In semiklassischen Theorien treten häufig Integrale mit schnell oszillierenden Integranden auf, die mittels einer Stationäre-Phase-Näherung gelöst werden.

a) Zeigen Sie:

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, g(x) \exp\left(\frac{i}{\hbar} f(x)\right) \approx \sum_{x_\mu} \frac{g(x_\mu)}{\sqrt{|f''(x_\mu)|}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} f(x_\mu) + i\frac{\pi}{4}\sigma_\mu\right) ,$$

wobei x_μ alle stationären Punkte von f mit $f'(x_\mu) = 0$ durchläuft und

$$\sigma_\mu = \operatorname{sign} f''(x_\mu) = \begin{cases} +1 & : \quad f''(x_\mu) > 0 \\ -1 & : \quad f''(x_\mu) < 0 \end{cases} .$$

Wir nehmen an, dass $f''(x_\mu) \neq 0$ für alle stationären Punkte x_μ gilt.
Hinweis: Entwickeln Sie die Phase f um die stationären Punkte in eine Taylor-Reihe 2. Ordnung. Verwenden Sie außerdem

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \exp\left(\pm i x^2\right) = \sqrt{\pi} \exp\left(\pm i \frac{\pi}{4}\right) .$$

Aufgabe 6: Methode der stationären Phase (Teil 2) **5 Punkte**

b) Zeigen Sie: Die Verallgemeinerung für N-dimensionale Integrale lautet

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^{N/2}} \int d^N x\, g(x) \exp\left(\frac{i}{\hbar} f(x)\right) \approx \sum_{x_\mu} \frac{g(x_\mu)}{\sqrt{|\det \mathrm{H} f(x_\mu)|}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} f(x_\mu) + i\frac{\pi}{4}\sigma_\mu\right) ,$$

wobei die stationären Punkte durch $\nabla f(x_\mu) = 0$ gegeben sind,

$$(\mathrm{H} f)_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}$$

die Hessesche Matrix von f ist und $\sigma_\mu = \sum \operatorname{sign} \lambda_i^{(\mu)}$ mit den Eigenwerten $\lambda_1^{(\mu)}, \ldots, \lambda_N^{(\mu)}$ von $\mathrm{H} f(x_\mu)$.